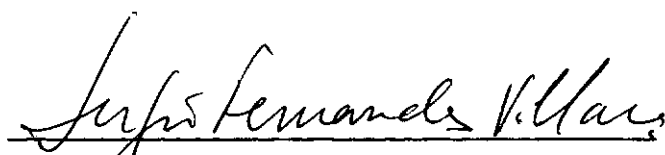



APLICAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS EM PLACAS COM O  
USO DE MALHAS ARBITRÁRIAS

*Lygia Maria Gomes da Silva*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

  
Prof. Sergio Fernandes Villaça  
(Presidente)

  
Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia

  
Prof. Carlos Henrique Holck

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1988

SILVA, LYGIA MARIA GOMES DA

Aplicação de diferenças finitas energéticas  
em placas com o uso de malhas arbitrárias.

xv , 167 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1988).

Tese — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Placas    I. COPPE/UFRJ    II. Título (série)

A Deus que, com sua luz orien  
tadora, possibilitou-me ver além  
dos obstáculos para o sucesso, con  
cedendo sentido, propósito e dire-  
ção à minha vida.

Aos meus pais e irmãos pelo  
apoio e incentivo.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Sergio Fernandes Villaça pela orientação segura e competente dada a este trabalho, vivamente estimulado pela demonstração de sua confiança, e pelos valiosíssimos conhecimentos que transmitiu pacientemente, uma e outros autenticados pelos exemplos que defluem de sua proveitosa existência.

Ao professor Luiz Fernando Taborda Garcia pelo incentivo constante aos estudos pós-graduados ajudando a vencer a hesitação dos primeiros passos, iluminando a trajetória, desfazendo as sombras de dúvidas inesperadas e amparando a fadiga do final da caminhada, como guia experiente, cuja presença amiga anima e conforta.

Ao professor João Sergio Fajardo Roldão como Coordenador do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ.

Aos professores José Claudio de Faria Telles e Humberto Lima Soriano pelo incentivo e atenções dispensados nos Cursos de Pós-Graduação.

Aos amigos do Núcleo de Computação da Universidade Federal do Rio de Janeiro pela grande colaboração.

A Luiz Carlos Mendes, Ricardo e Lúcia Helena Abreu pela amizade e apoio constantes.

Ao colega Fernando Amorim de Paula pela colaboração.

Aos funcionários da COPPE/UFRJ pela boa vontade.

Ao Gilmar Fernandes pela confecção dos desenhos e a Jaciãra Roberta Barbosa pelo trabalho de datilografia.

A todos que, de alguma maneira, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

APLICAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS EM  
PLACAS COM O USO DE MALHAS ARBITRÁRIAS

Lygia Maria Gomes da Silva

Abril de 1988

Orientador: Sergio Fernandes Villaça

Programa : Engenharia Civil

O presente trabalho utiliza a incorporação do conceito de isoparametria no contexto das diferenças finitas energéticas, conferindo-lhes maior eficiência e versatilidade. Possibilita-se, assim, a abordagem de problemas complexos de flexão de placas com bordos curvos ou irregulares.

O método proposto é basicamente uma extensão do conhecido Método Energético de Diferenças Finitas, com o desenvolvimento de um modelo flexível de discretização. A teoria é apresentada de uma forma especialmente adequada à implementação de um programa sistemático.

Esse procedimento permite que as diferenças finitas se apresentem de forma mais flexível e programável, de tal forma que se considere praticamente alcançada a generalidade geométrica do método dos elementos finitos.

Embora o procedimento exposto tenha amplo campo de aplicação, o trabalho aqui descrito objetiva especificamente a análise estática linear de placas delgadas submetidas a carregamentos transversais. Apresentam-se resultados de problemas simples adotados como exemplos, permitindo-se constatar a eficiência do método.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

APPLICATION OF THE ENERGETIC FINITE DIFFERENCES  
TO PLATES WITH ARBITRARY MESHES

Lygia Maria Gomes da Silva

April, 1988

Chairman : Sergio Fernandes Villaça

Department: Civil Engineering

This work presents the incorporation of the concept of isoparametry in energetic finite differences making them more powerful and versatile to tackle complex plate bending problems with curved or irregular boundaries.

The proposed method is basically an extension of the known finite difference energy method with the improvement of flexible mesh discretization. The theory has been set down in such a way as to be particularly useful to a systematic program implementation.

This procedure puts the finite difference ideas into a more programable and flexible structure, so that the geometry generality of the finite element can be approached.

Although this procedure has broaden applicability, the work described here deals specially with static linear elastic analysis of thin plates subjected to lateral loadings. Results from simple example problems are given and the effectiveness of the method is illustrated.

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - RESUMO DA TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS .....	12
II.1 - Considerações Gerais .....	12
II.2 - Campo de Deslocamentos .....	14
II.3 - Relações Deformação-Deslocamento .....	14
II.4 - Relação Tensão-Deformação .....	15
II.5 - Expressões dos Esforços Resultantes .....	16
II.6 - Equação Diferencial de Flexão de Placas .....	18
II.7 - Condições de Contorno .....	19
CAPÍTULO III - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	21
III.1 - Conceituação .....	21
III.2 - Notação .....	22
III.3 - Desenvolvimento .....	23
III.3.1 - Expansão em Série de Taylor .....	23
III.3.2 - Diferenças Finitas Ordinárias .....	26
III.3.3 - Diferenças Finitas Parciais .....	28



CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS À ANÁLISE LINEAR DE PLACAS COM CONTORNO ARBITRÁRIO .	32
IV.1 - Introdução .....	32
IV.2 - Energia Potencial da Placa .....	34
IV.3 - Minimização da Energia Potencial .....	38
IV.4 - Nós, Áreas e Esquemas de Diferenças Finitas .....	43
IV.5 - Condições de Contorno .....	52
IV.6 - Considerações Sobre os Nós dos Cantos da Malha ..	56
IV.7 - Considerações Sobre Simetria .....	57
IV.8 - Definição do Modelo Flexível .....	59
IV.8.1 - Considerações Gerais .....	59
IV.8.2 - Funções de Forma para o Elemento Flexível .....	62
IV.8.3 - Modelo Isoparamétrico .....	66
IV.8.4 - Transformação de Derivadas Parciais para o Sis- tema de Coordenadas Curvilíneas .....	79
IV.8.5 - Determinação das Deformações Generalizadas do Elemento .....	87
IV.8.6 - Determinação da Área do Elemento Flexível .....	91
IV.8.7 - Equações de Equilíbrio .....	94
IV.8.8 - Esforços Solicitantes no Elemento .....	99

CAPÍTULO V - PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA .....	100
V.1 - Introdução .....	100
V.2 - Programação Automática .....	100
CAPÍTULO VI - RESULTADOS NUMÉRICOS .....	109
VI.1 - Introdução .....	109
VI.2 - Exemplos .....	110
VI.2.1 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada Uniformemente .....	110
VI.2.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada no Centro .....	113
VI.2.3 - Placa Esconsa Simplesmente Apoiada nos Bordos e Uniformemente Carregada .....	123
VI.2.4 - Placa Triangular Equilátera Simplesmente Apoia- da nos Bordos e Carregada Uniformemente .....	131
VI.3 - Análise dos Resultados .....	141
VI.3.1 - Considerações Gerais .....	141
VI.3.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada Uniformemente .....	142
VI.3.3 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada e Carregada no Centro .....	143

VI.3.4 - Placa Esconsa ( $60^0$ ) Simplesmente Apoiada nos Bordos e Uniformemente Carregada .....	143
VI.3.5 - Placa Triangular Equilãtera Simplesmente Apoia-da nos Bordos e Carregada no Centro .....	145
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES .....	147
VII.1 - Introdução .....	147
VII.2 - Conclusões .....	147
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	154
APÊNDICE - FLUXOGRAMAS SIMPLIFICADOS DO PROGRAMA COMPUTA-CIONAL .....	162

SIMBOLOGIACAPÍTULO II

- $x, y, z$  - coordenadas cartesianas ortogonais
- $w$  - deslocamento transversal da superfície média da placa
- $u_1, u_2, u_3$  - componentes de deslocamento
- $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$  - componentes de deformação em coordenadas cartesianas
- $\epsilon$  - matriz de deformações generalizadas
- $E$  - módulo de elasticidade longitudinal
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $G$  - módulo de elasticidade transversal
- $h$  - espessura da placa
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  - componentes de tensão em coordenadas cartesianas
- $\sigma$  - matriz de tensões generalizadas

- $M_x, M_y$  - momentos fletores por unidade de comprimento nas faces de normais  $x$  e  $y$ , respectivamente
- $M_{xy}$  - momento torçor por unidade de comprimento na face de normal  $x$
- $Q_x, Q_y$  - esforços cortantes por unidade de comprimento nas faces de normais  $x$  e  $y$ , respectivamente
- $q$  - intensidade de carga uniformemente distribuída

#### CAPÍTULO IV

- $x, y, z$  - coordenadas cartesianas ortogonais
- $w$  - deslocamento transversal da superfície média da placa
- $w_n$  - derivada primeira de  $w$  em relação a  $n$
- $w_{nn}$  - derivada segunda de  $w$  em relação a  $n$
- $\Pi$  - energia potencial total da placa
- $U$  - energia de deformação da placa
- $V$  - energia associada às cargas externas
- $p$  - intensidade de carga distribuída sobre a placa

- $D$  - rigidez à flexão da placa
- $\tilde{D}$  - matriz de elasticidade representativa de materiais isótropos
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $\tilde{\sigma}$  - matriz de tensões generalizadas
- $\tilde{\epsilon}$  - matriz de deformações generalizadas
- $\tilde{\delta}$  - vetor de deslocamentos transversais
- $\tilde{Q}$  - vetor das forças externas sobre a placa
- $\tilde{L}$  - operador diferencial de segunda ordem
- $\tilde{K}$  - matriz de rigidez global
- $s, t$  - coordenadas locais
- $J$  - jacobiano
- $J^*$  - determinante de jacobiano
- $\begin{matrix} I & J \\ \psi_\ell & \psi_m \end{matrix}$  - funções de interpolação polinomial de Lagrange
- $N_k$  - produto de polinômios de Lagrange em duas dimensões

- $\tilde{B}$  - matriz que relaciona as deformações generalizadas aos deslocamentos
- $U_i$  - energia de deformação por unidade de área
- $\bar{U}_i$  - energia de deformação em um "elemento"
- $\bar{V}_i$  - energia associada à carga externa sobre o "elemento"
- $p_i$  - carga transversal média distribuída sobre o "elemento"
- $\Delta A$  - área elementar
- $\Pi^e$  - energia potencial total do "elemento"
- $\tilde{Q}^e$  - vetor das forças nodais do "elemento"
- $\tilde{K}^e$  - matriz de rigidez do "elemento"

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O rápido progresso das técnicas computacionais nos últimos anos vem acarretando um enorme desenvolvimento na área de métodos numéricos. Conseqüentemente, problemas complexos com análises outrora consideradas impraticáveis, são atualmente solucionados numericamente com sucesso e de forma rotineira.

Pode-se considerar a existência de duas formas de aproximação no campo das soluções numéricas: técnicas variacionais, utilizadas juntamente com formulações de energia, e solução direta de equações diferenciais governantes.

No contexto da aproximação variacional, insere-se o método dos elementos finitos, consistindo na divisão do domínio em subdomínios e na consideração destes em conjunto.

Em relação à aproximação diferencial direta, verifica-se a existência de vários métodos numéricos. Por sua aplicação universal a problemas lineares e não lineares, destaca-se o método das diferenças finitas.

Técnicas de diferenças finitas convencionais são normalmente aplicadas à discretização do domínio de equações diferenciais, não só para aproximar-se diretamente o campo de variáveis, como também na substituição de diferenciais por operadores adequados. No entanto, tais técnicas apresentam, em geral, dificuldades relativas à consideração de condições de contorno geométri



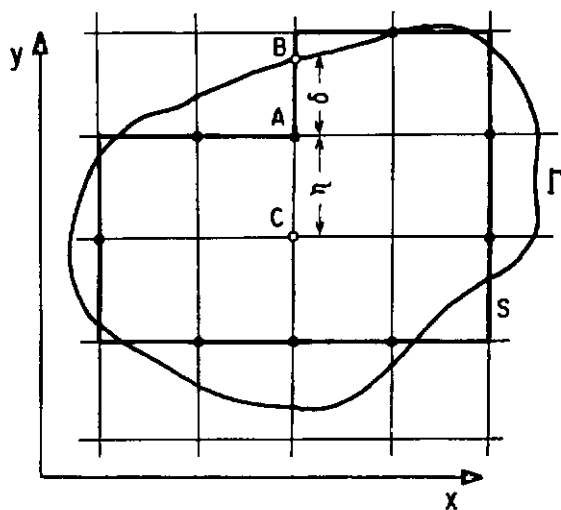
cas e naturais, na análise de estruturas com contornos irregulares. Além disso, o método das diferenças finitas convencionais apresenta desvantagens no campo computacional, decorrentes da geração de matrizes não simétricas.

Verifica-se [1] que uma diferença óbvia entre as técnicas de diferenças finitas e o método dos elementos finitos reside na facilidade com que este último lida com domínios irregulares.

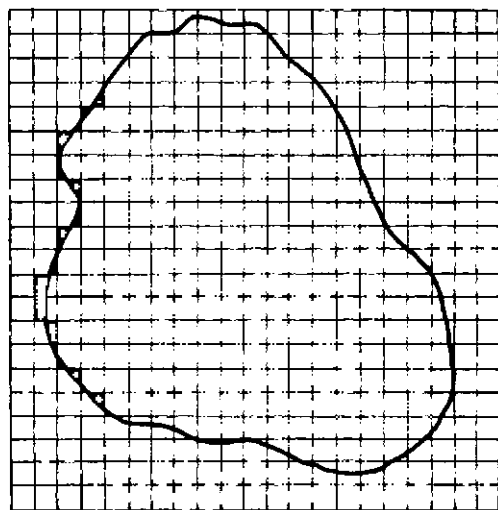
Sabe-se ser possível aproximar uma variedade de regiões assimilando seus contornos irregulares a polígonos retangulares, com a utilização de malhas quadradas de diferenças finitas (Figura I.1). Apesar de se conseguir, neste caso, uma boa aproximação especialmente com o uso de malhas bem refinadas, permanece o problema de tratamento de bordos curvos.

O procedimento clássico abordado por COLLATZ [2], em 1960, de se alterar a malha de diferenças finitas em nós interiores adjacentes aos bordos curvos (Figura I.2), é por demais laborioso. Esta dificuldade se deve à necessária consideração de cada um destes pontos nodais como um caso particular.

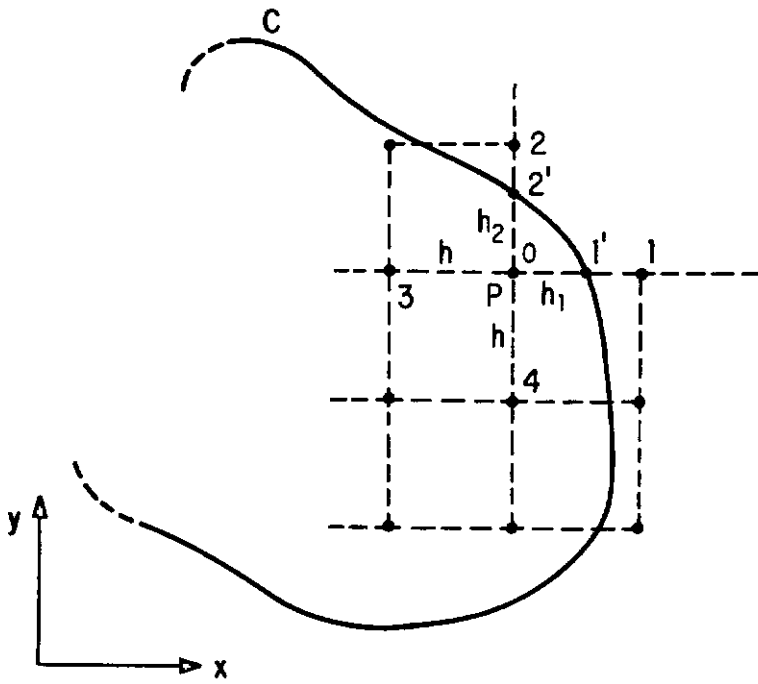
Mais recentemente, diferenças finitas foram combinadas com a formulação de energia. Deste modo, derivadas de deslocamentos são substituídas por formas de diferenças finitas na expressão de energia potencial total, originando o procedimento designado por método energético de diferenças finitas. Este método de análise foi aparentemente introduzido por COURANT [3] em



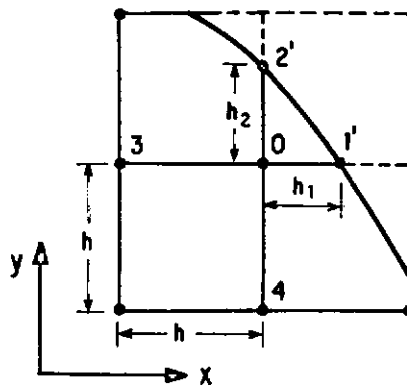
(a) O contorno curvo  $\Gamma$  e o correspondente contorno  $S$  de malha.



(b) Aproximação de um contorno irregular por uma malha quadrada bem refinada.



(a) Malha quadrada discretizando uma região de bordo curvo.



(b) Modelo de diferenças finitas utilizando na proximidade de um bordo curvo.

1928, e discutido por FORSYTHE e WASOW [4]. Cita-se também a sua introdução por HOUBOLT [5] no cálculo das flechas e momentos fletores em vigas e placas, e por BUSHNELL [6] e BUSHNELL e ALMROTH [8] em vários tipos de estruturas. Muitos esforços têm sido empreendidos em pesquisas deste gênero, incluindo-se, entre outros, os trabalhos realizados por STEIN [9], HAVNER e STANTON [10], BUDIANSKY [11], JOHNSON [12], ALMROTH [13], NOOR [14], CHUANG [15], SCHNOBRICH e PECKNOLD [16].

O método dos elementos finitos e o método energético de diferenças finitas estão proximamente relacionados, apresentando uma teoria relativamente abstrata (assim como no método dos elementos finitos, no método energético de diferenças finitas faz-se também necessária a introdução de conceitos de análise funcional e métodos variacionais na formulação de suas equações algébricas), e possuindo as mesmas etapas para análise estrutural. Pode-se então afirmar que os dois métodos diferem basicamente na escolha de coordenadas generalizadas e na localização dos pontos nodais que discretizam a estrutura.

Sendo a formulação variacional utilizada, somente devem ser atendidas as condições de contorno geométricas dos problemas analisados pelo método energético de diferenças finitas. Este método apresenta ainda a característica de gerar matrizes simétricas e positivas definidas de forma eficiente. Uma de suas maiores vantagens sobre o método dos elementos finitos encontra-se na economia de tempo computacional quando da formação de matrizes de rigidez e de carga, principalmente em problemas bi-dimensionais.

Posteriormente, BURAGOHAIN [17, 18, 19, 20] apresentou um procedimento especial denominado método da energia discretizada, conservando as mesmas características do método energético de diferenças finitas. Todavia, esta nova técnica propõe a eliminação dos pontos fictícios das malhas de diferenças finitas, através da prescrição de graus de liberdade adicionais nos nós dos bordos. São criados elementos especiais para a discretização do contorno, reduzindo assim as desvantagens [7, 8] decorrentes da consideração de tais pontos nodais.

A formulação do método da energia discretizada, bem como a do método energético de diferenças finitas, carece ainda da versatilidade que possui o método dos elementos finitos para discretizar estruturas com contornos irregulares. As dificuldades associadas à consideração destas estruturas no âmbito das diferenças finitas vêm impulsionando pesquisas no sentido de desenvolver técnicas que permitam a utilização de malhas irregulares para análise destes casos.

A idéia de gerarem-se malhas arbitrárias para diferenças finitas não é recente, sendo realizados estudos anteriores [21, 22] com base em expansões do teorema de Taylor e técnicas variacionais. Uma discussão sobre o problema foi apresentada por COLLATZ, por exemplo, utilizando aproximação por série de Taylor. PERRONE e KAO [23], em 1974, apresentaram um trabalho no qual são examinadas as singularidades decorrentes deste procedimento, bem como uma forma de evitá-las através da seleção criteriosa de pontos nodais. Os pesquisadores adotaram naquele trabalho um modelo de nove nós (Figura I.3) para a discretização do contínuo, com o qual é eliminada a singularidade da matriz de

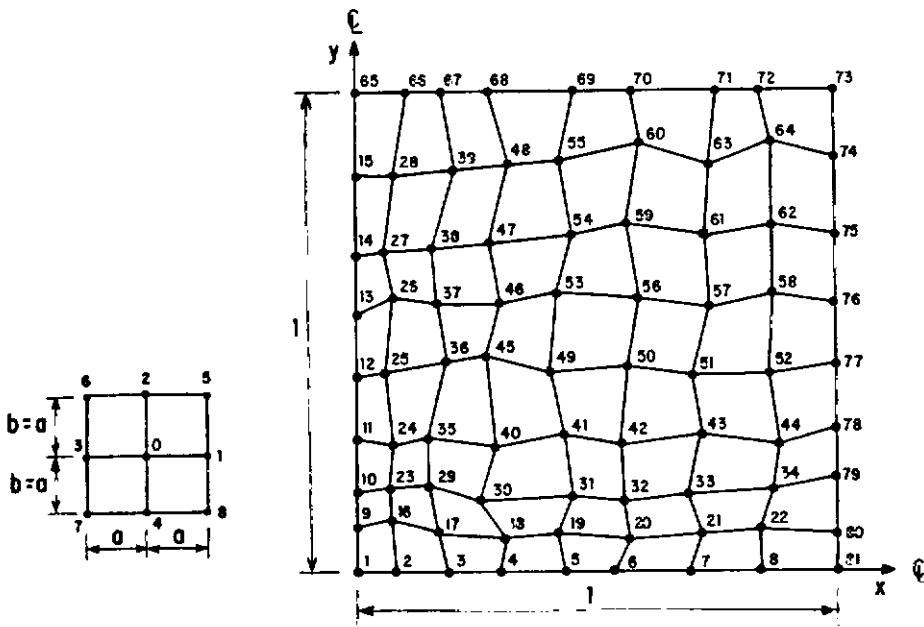


Fig. I-3 - Malha irregular em um quarto de uma região quadrada e modelo de diferenças finitas.

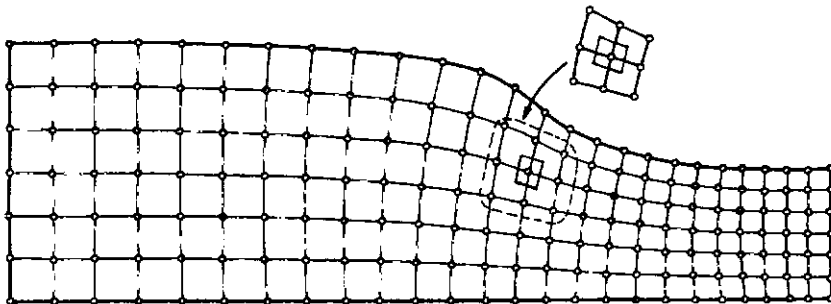


Fig. I-4 - Modelo flexível aplicado a uma região de bordo curvo.

coeficientes e são obtidas derivadas mais precisas. Tal modelo possui a mesma estrutura do indicado anteriormente por FORSYTHE para a resolução de problemas de valor de contorno envolvendo derivadas parciais em um espaço bi-dimensional. Através da resolução de quatro sistemas de equações lineares, e determinação da média destes resultados, são obtidos os coeficientes de diferenças.

Uma técnica diferente foi apresentada por CHU [24], utilizando uma transformação numérica (global) do plano físico para um sistema de coordenadas oblíquas no plano "lógico". São sugeridos modelos de estrutura triangular equilátera, sendo adotado um elemento hexagonal de sete pontos para os nós interiores, e elementos especiais de cinco pontos para os nós dos cantos.

FREY [25], em 1977, propôs uma abordagem em que se combinam algumas características dos trabalhos de PERRONE, KAO e CHU. Sugere-se a adoção de um modelo de discretização para diferenças finitas com a mesma estrutura retangular do utilizado por PERRONE e KAO, porém tornando-o flexível (Figura I.4). De forma similar ao trabalho de CHU, utiliza-se uma transformação de coordenadas para um plano de referência, evitando-se assim a inversão de sistemas lineares. Esta formulação difere da proposta por CHU, por apresentar uma transformação de caráter unicamente local, semelhantemente ao procedimento usual no método dos elementos finitos. Verifica-se que o modelo flexível aqui sugerido é análogo ao elemento finito isoparamétrico de nove nós, capaz de se adaptar a malhas arbitrárias. A introdução do conceito de isoparametria, proposto por ERGATOUDIS [26] no contexto das dife-

renças finitas, possibilitou a inclusão de geometrias complexas no seu campo de aplicação.

Estudos feitos por LAU [27, 28] em diferenças finitas convencionais, utilizando coordenadas curvilíneas, apresentaram uma boa aproximação para expressões de derivadas em problemas de bordos curvos ou irregulares. Além disso, o método das diferenças finitas curvilíneas é capaz de acomodar facilmente a condição prescrita de derivada normal em bordos curvos, fazendo coincidir uma das coordenadas locais com a normal ao bordo.

BARVE e DEY [29], em 1982, incorporaram elementos finitos isoparamétricos curvos na formulação de diferenças finitas energéticas, viabilizando sua aplicação a problemas de flexão de placas de formas irregulares. A aproximação apresentada é superior à formulação de equação diferencial estudada por LAU, por envolver termos diferenciais de ordem inferior e conduzir a um sistema simétrico de equações algébricas.

Na COPPE/UFRJ têm sido desenvolvidos diversos trabalhos sobre a utilização do método de diferenças finitas a problemas de placas e de estado plano. Dentre os mais recentes, citam-se os de PLETZ [30], abordando a utilização do método da energia discretizada na flexão não linear de placas em forma de setor circular, e os de WEYNE FILHO [31] e MILEK [32], estudando a aplicação de malhas arbitrárias de diferenças finitas a problemas de chapas.

Com a finalidade de analisar problemas lineares de flexão de placas com contornos irregulares, o presente trabalho



faz um estudo do método energético de diferenças finitas com a utilização de malhas curvilíneas. Na formulação apresentada introduz-se o conceito de isoparametria, assim como no trabalho de BARVE e DEY. Porém, recorre-se a fórmulas de polinômios de Lagrange para mais facilmente representar tal isoparametria, da mesma maneira que FREY em diferenças finitas convencionais. A aproximação numérica apresentada ultrapassa os limites de aplicação das diferenças finitas convencionais e tem sua eficiência comparável ao método dos elementos finitos, uma vez alcançada a generalidade geométrica deste último. Com o objetivo de estimar-se o desempenho e a versatilidade da presente formulação, são resolvidos alguns exemplos de placas isótropas com formas diversas e os resultados são comparados com as respectivas soluções analíticas e numéricas disponíveis. Conforme já se disse, o trabalho apresentado limita-se a pequenos deslocamentos transversais (solução linear), porém esta limitação não é inerente ao método em si. Pode-se dizer que o procedimento apresentado possui um campo de aplicabilidade consideravelmente amplo.

É de se notar o novo caminho que se abre com as pesquisas feitas no contexto das diferenças finitas nos últimos anos. Tal processo numérico lamentavelmente assistiu à diminuição de seu desenvolvimento e importância, face a expansão do método dos elementos finitos. Todavia, recentemente, as diferenças finitas vêm assimilando, com algumas vantagens, características de formulação e versatilidade próprias do método dos elementos finitos.

A seguir são descritos os assuntos abordados em cada um dos demais capítulos deste trabalho.

No Capítulo II é feito um resumo da teoria clássica de placas, apresentando expressões de deformações, tensões, esforços solicitantes e condições de contorno, em coordenadas cartesianas ortogonais.

No Capítulo III apresenta-se sucintamente o método das diferenças finitas convencionais.

No Capítulo IV são desenvolvidos os fundamentos teóricos básicos do método energético de diferenças finitas para a análise de flexão de placas linearmente elásticas, homogêneas e isotropas. É introduzido o modelo flexível para a concepção de malhas curvilíneas retangulares na formulação referida.

No Capítulo V é descrito o programa e suas principais características. São considerados procedimentos adotados na implementação numérica da formulação estudada, cujas aplicações encontram-se no Capítulo VI. São apresentados exemplos de placas com formas irregulares, que se analisam e discutem com apresentação de tabelas e gráficos.

No Capítulo VII são apresentadas as conclusões gerais e sugestões para novos estudos e continuidade do presente trabalho.

Finalmente, no Apêndice, são apresentados fluxogramas associados ao programa de computação desenvolvido.

## CAPÍTULO II

## RESUMO DA TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

II.1 - Considerações Gerais

O desenvolvimento teórico que aqui se apresenta refere-se a problemas de elasticidade linear; isto é, admite-se que as tensões em um ponto sejam uma combinação linear das deformações associadas (Lei de Hooke generalizada) e que os deslocamentos sejam pequenos em relação às dimensões globais da peça.

No presente trabalho, a teoria clássica (simplificada) de placas é tomada como base para os desenvolvimentos. As hipóteses simplificativas nela introduzidas, permitem que os estados de deformação e tensão da placa sejam inteiramente descritos, através do deslocamento transversal  $w$  de sua superfície média.

É, então, importante que qualquer comparação dos resultados obtidos pelo método energético de diferenças finitas seja feita com soluções obtidas pela teoria clássica de placas.

A teoria de placas no regime de pequenos deslocamentos [33] baseia-se nas seguintes considerações, atribuídas a Kirchhoff e Love:

- 1) o material da placa é perfeitamente elástico, homogêneo e isotrópico, obedecendo à Lei de Hooke generalizada. Não atuam forças de massa;

- 2) a espessura da placa é constante e pequena em relação às outras dimensões, assim como os deslocamentos transversais do plano médio (flechas) são pequenos quando comparados com a espessura;
- 3) não há deformação no plano médio durante a flexão, transformando-se o mesmo numa superfície neutra de fletida. Isto implica em dizer que o carregamento seja aplicado transversalmente, e que seja desprezado o aparecimento de esforços de membrana;
- 4) a deformação é tal que, segmentos retos e normais ao plano médio indeformado permanecem retos, normais à superfície média e indeformados após a aplicação das cargas. Verifica-se portanto que são desprezadas as influências das componentes de deformação  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  no estabelecimento da geometria deformada da placa;
- 5) tensões normais na direção normal à placa são consideradas desprezíveis quando comparadas com as demais tensões normais. Essa hipótese não é verificada em regiões de cargas concentradas, proximidades de apoios, etc.

Adotar-se-á um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais na dedução das expressões que se seguem.

## II.2 - Campo de Deslocamentos

Em consequência das hipóteses 2, 3 e 4 do item anterior resulta o seguinte campo de deslocamentos proveniente da flexão da placa:

$$\begin{aligned} u_1 &= -z \cdot w_x(x,y) \\ u_2 &= -z \cdot w_y(x,y) \\ u_3 &= w(x,y) \end{aligned} \tag{II.1}$$

onde  $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ , etc.

## II.3 - Relações Deformação - Deslocamento

Podem-se deduzir expressões que relacionam as deformações com os deslocamentos de um ponto genérico distante de  $z$  do plano médio. Tem-se assim, o seguinte campo de deformações:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -z \cdot w_{xx} \\ \epsilon_{yy} &= -z \cdot w_{yy} \\ \tau_{xy} &= -2z \cdot w_{xy} \end{aligned} \tag{II.2}$$

onde  $w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , etc.

Verifica-se que as hipóteses simplificadoras introduzidas na teoria clássica de placas permitem obter estas deformações com facilidade, uma vez conhecidas as curvaturas e torção na placa; sendo assim, adotar-se-á como matriz de deformações (generalizando-se o significado da palavra), a matriz  $\underline{\varepsilon}$  definida por

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{bmatrix} . \quad (\text{II.3})$$

#### II.4 - Relação Tensão - Deformação

Utilizando-se a Lei de Hooke, componentes de tensão são linearmente relacionadas às componentes de deformação. Considerando-se neste trabalho o material da placa apresentando isotropia, seguem-se as relações:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} , \quad (\text{II.4})$$

onde E, é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e G o módulo de elasticidade transversal dado por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (\text{II.5})$$

Através da substituição das relações deformação-deslocamento (II.2) na expressão (II.4), obtêm-se as tensões em função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} (w_{xx} + \nu w_{yy}) \\ \sigma_y &= - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} (w_{yy} + \nu w_{xx}) \\ \tau_{xy} &= - 2G \cdot z w_{xy} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

## II.5 - Expressões dos Esforços Resultantes

As componentes do campo de tensões acima prestam-se, naturalmente, à determinação dos esforços (momentos fletores e torsores) por unidade de comprimento, associados a este campo:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = - \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} (w_{xx} + w_{yy}) \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = - \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} (w_{yy} + w_{xx}) \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = - \frac{2G \cdot h^3}{12} w_{xy} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

sendo considerada constante a espessura  $h$  da placa.

Segue-se que às deformações (II.3) correspondem os momentos fletores e torçores, aqui determinados e denominados tensões generalizadas [33]. A equação, relacionando os esforços e deformações, é, na sua forma matricial,

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} \quad (\text{II.8})$$

onde  $\underline{D}$  é uma matriz de transformação associando as deformações elásticas  $\underline{\epsilon}$  às tensões generalizadas  $\underline{\sigma}$ . A matriz  $\underline{D}$  é representativa das propriedades do material do elemento, e no caso de isotropia é fornecida por

$$\underline{D} = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Substituindo-se as expressões (II.3) e (II.9) em (II.7), obtém-se



$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot h^2}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

## II.6 - Equação Diferencial de Flexão de Placas

Considerando-se o equilíbrio do elemento de placa, são obtidas as seguintes equações:

- Equilíbrio de momentos em relação a x

$$\left( M_{xy} \right)_x + \left( M_y \right)_y + Q_y = 0 \quad (\text{II.11})$$

- Equilíbrio de momentos em relação a y

$$\left( M_{yx} \right)_y + \left( M_x \right)_x - Q_x = 0 \quad (\text{II.12})$$

- Equilíbrio de forças na direção z

$$\left( Q_x \right)_x + \left( Q_y \right)_y + q = 0 \quad (\text{II.13})$$

onde  $\left( M_{xy} \right)_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ , etc., com  $Q_x$  e  $Q_y$  representando os esforços cortantes nas faces de normais x e y, respectivamente, e q designando a carga distribuída sobre a placa.

As equações de equilíbrio acima juntamente com as relações tensão generalizada - deslocamento (II.8) permitem se chegar à equação diferencial de placas (equação de Lagrange):

$$w_{xxxx} + 2 w_{xxyy} + w_{yyyy} = \frac{q}{D} . \quad (\text{II.14})$$

A equação (II.14) pode ser reescrita na forma

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (\text{equação bi-harmônica}). \quad (\text{II.15})$$

## II.7 - Condições de Contorno

Uma solução completa para a equação que governa o problema de flexão de placas deve satisfazer simultaneamente a equação diferencial e as condições de contorno de um determinado problema.

Associadas à equação diferencial de 4ª ordem que governa a flexão de placas, duas condições de contorno, sejam em termos de deslocamentos ou de esforços, são exigidas em cada bordo. Na teoria clássica de placas, duas componentes de esforços são consideradas: força cortante efetiva e momento fletor. Correspondentemente, as componentes de deslocamento a serem utilizadas na formulação das condições de contorno são: translação vertical e rotação.

São consideradas condições de contorno geométricas aquelas que se associam aos deslocamentos prescritos. Por outro lado, condições estáticas de contorno são as que envolvem os esforços (momentos e forças cortantes efetivas).

Seguem-se as expressões para as condições de contorno mais usuais:

- bordo engastado

$$w = w_{,n} = 0 \quad (\text{II.16})$$

- bordo simplesmente apoiado

$$w = M_n = 0 \quad (\text{II.17})$$

- bordo livre

$$M_n = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$Q_n + M_{nt,t} = 0$$

onde  $n$  representa a direção normal ao bordo e  $t$  a direção tangente ao mesmo.

## CAPÍTULO III

### MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

#### III.1 - Conceituação

Segundo LAPIDUS e PINDER [34], o método das diferenças finitas consiste em uma técnica de aproximação pela qual o domínio em que se tem interesse é representado por um conjunto de pontos e os valores das derivadas de uma função nestes pontos são estabelecidos utilizando-se expansões em série de Taylor. Trata-se de um método numérico, baseado na substituição das equações diferenciais pelas correspondentes equações algébricas, relacionando grandezas representativas do domínio nesses pontos.

O domínio de solução da equação diferencial parcial é subdividido por uma malha constituída por um número finito de pontos nodais. A derivada em cada ponto é então substituída por uma aproximação em diferenças finitas.

Soluções numéricas em diferenças finitas de problemas de valor de contorno envolvendo equações diferenciais parciais em coordenadas bi-dimensionais são geralmente obtidas por meio de uma malha, utilizando-se operadores diferenciais com ordens de erro predeterminadas. Tais aproximações têm sido amplamente aplicadas em problemas em que o contorno coincide com as linhas paramétricas de superfície do sistema de coordenadas utilizado na análise. Conseqüentemente, desenvolveu-se uma série de operadores diferenciais em vários sistemas de coordenadas, tais como cartesiano, oblíquo, triangular (equilátero ou não), polar, que

correspondem a formas regulares de interesse estrutural e nas aplicações gerais da mecânica do contínuo. SALVADORI e BARON [35] apresentam exemplos de diversos tipos de operadores com as suas respectivas ordens de erro. Cita-se a aplicação destes operadores a uma variedade de problemas estruturais envolvendo flambagem de vigas, placas e cascas, em estudos realizados por SALVADORI [36]. Outra aplicação de interesse estrutural foi apresentada por JENSON [37], utilizando coordenadas triangulares não equiláteras na análise de placas oblíquas.

Apresentar-se-á a seguir o desenvolvimento de representações em diferenças finitas convencionais em coordenadas cartesianas uni - e - bi-dimensionais, recorrendo-se à notação adotada em [34].

### III.2 - Notação

Considere-se primeiramente  $u(x)$ , sendo  $u$  uma função contínua de variável independente  $x$ . Discretiza-se o domínio  $x$  (Figura III.1) em um conjunto de pontos nodais tais que

$$u(x_r) \equiv u(rh) \equiv u_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Substituindo-se  $x_r$  por  $rh$ , as coordenadas nodais podem ser especificadas simplesmente pelo produto do inteiro  $r$  e o espaçamento de malha  $h$  (onde  $h$  é suposto constante).

O inteiro  $r$  especifica a posição do nó ao longo do eixo de coordenadas  $x$  em relação aos dados apresentados, sendo ge

almente  $r = 0$  quando  $x = 0$ . Se  $h$  é constante,  $u(rh)$  pode ser simplesmente representado por  $u_r$ .

No caso bi-dimensional (Figura III.2), a função  $u(x,y)$  pode ser especificada em qualquer nó como

$$u(x_r, y_s) \equiv u(rh, sk) \equiv u_{r,s} \quad , \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$s = 0, 1, 2, \dots$$

O espaçamento na direção  $x$  é  $h$  e, na direção  $y$ ,  $k$ . Os inteiros  $r$  e  $s$  referem-se à localização de  $u$  ao longo dos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Representações em diferenças finitas podem ser desenvolvidas [34] utilizando-se expansões em série de Taylor, ou através de operadores lineares. Os erros associados às aproximações em diferenças finitas são referidos ao truncamento da série.

### III.3 - Desenvolvimento

#### III.3.1 - Expansão em Série de Taylor

Seja a expansão em série de Taylor de  $u(x)$  no ponto  $x_r$ :

$$u(x_r + h) = u(x_r) + hu_x \Big|_r + \frac{h^2}{2!} u_{xx} \Big|_r + \frac{h^3}{3!} u_{xxx} \Big|_r + \dots \quad (\text{III.1})$$

$$u(x_r - h) = u(x_r) - hu_x \Big|_r + \frac{h^2}{2!} u_{xx} \Big|_r - \frac{h^3}{3!} u_{xxx} \Big|_r + \dots \quad (\text{III.2})$$

Obtêm-se das equações anteriores

$$u_x \Big|_r = \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} - \frac{h}{2!} u_{xx} \Big|_r - \frac{h^2}{3!} u_{xxx} \Big|_r - \dots \quad (\text{III.3})$$

$$u_x \Big|_r = \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} + \frac{h}{2!} u_{xx} \Big|_r - \frac{h^2}{3!} u_{xxx} \Big|_r + \dots \quad (\text{III.4})$$

Duas possíveis aproximações para  $u_x \Big|_r$  são fornecidas por

$$u_x \Big|_r \approx \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} \equiv \frac{u_{r+1} - u_r}{h} \quad (\text{III.5})$$

$$u_x \Big|_r \approx \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} \equiv \frac{u_r - u_{r-1}}{h} . \quad (\text{III.6})$$

O erro associado à aproximação é caracterizado pelo primeiro termo da série truncada, ou seja:

$$E_r = \pm \frac{h}{2} u_{xx} \Big|_{\xi} = O(h) \quad , \quad x_r \leq \xi \leq x_{r+h}$$

ou

$$x_{r-h} \leq \xi \leq x_r \quad (\text{III.7})$$

e pode ser dito de ordem  $h$ ,  $O(h)$ , quando  $h \rightarrow 0$ .

Adicionando-se as expressões (III.5) e (III.6), obtêm-se ainda para derivada primeira de  $u$  em  $x_r$

$$u_x \Big|_r = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h}, \quad (III.8)$$

sendo o primeiro termo truncado

$$- \frac{h^2}{6} u_{xxx} \Big|_{\xi} \cdot \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

Subtraindo-se (III.4) de (III.3) e resolvendo-se para  $u_{xx} \Big|_r$ , obtêm-se

$$u_{xx} \Big|_r = \frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2}, \quad (III.9)$$

sendo o primeiro termo truncado

$$- \frac{h^2}{12} u_{xxx} \Big|_{\xi} \cdot \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

Conclui-se que (III.9) é  $O(h^2)$ . De forma semelhante, podem ser determinadas aproximações para derivadas de ordem mais elevada, gerando-se fórmulas mais complexas. Verifica-se, todavia, que tal procedimento pode tornar-se excessivamente laborioso. A aproximação por operadores (Tabela III.1) tem a vantagem de apresentar todas as formas de modo mais simples com resultados análogos aos obtidos com a série de Taylor.



Tab.III.1 - Definição de operadores lineares de diferenças finitas

OPERADOR	SÍMBOLO	REPRESENTAÇÃO DE DIFERENÇAS
Diferenças Progressivas	$\Delta$	$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r$
Diferenças Regressivas	$\nabla$	$\nabla u_r = u_r - u_{r-1}$
Diferenças Centrais	$\delta$	$\delta u_r = \frac{u_{r+1}}{2} - \frac{u_{r-1}}{2}$

### III.3.2 - Diferenças Finitas Ordinárias

Derivadas de primeira ordem no ponto  $r$  (Figura III.1) são representadas em diferenças finitas, utilizando-se operadores lineares e tomando-se intervalos  $\Delta x = h$ . Seguem-se expressões em diferenças finitas progressivas, regressivas e centrais para  $u_x \Big|_r$ .

$$u_x \Big|_r \approx \frac{\Delta u_r}{h} = \frac{u_{r+1} - u_r}{h} \quad (\text{III.10})$$

$$u_x \Big|_r \approx \frac{\nabla u_r}{h} = \frac{u_r - u_{r-1}}{h} \quad (\text{III.11})$$

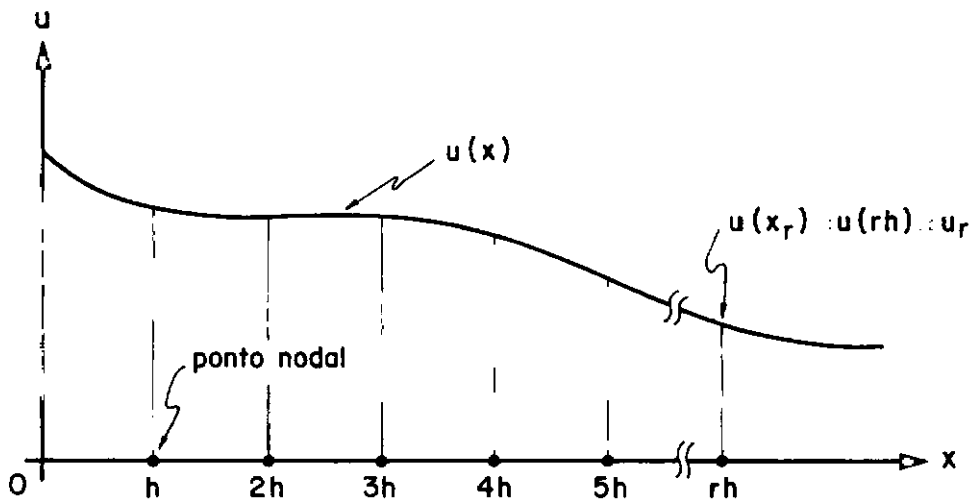


Figura III.1 - Discretização de  $u=u(x)$  em diferenças finitas utilizando-se espaçamento de malha constante  $h$ .

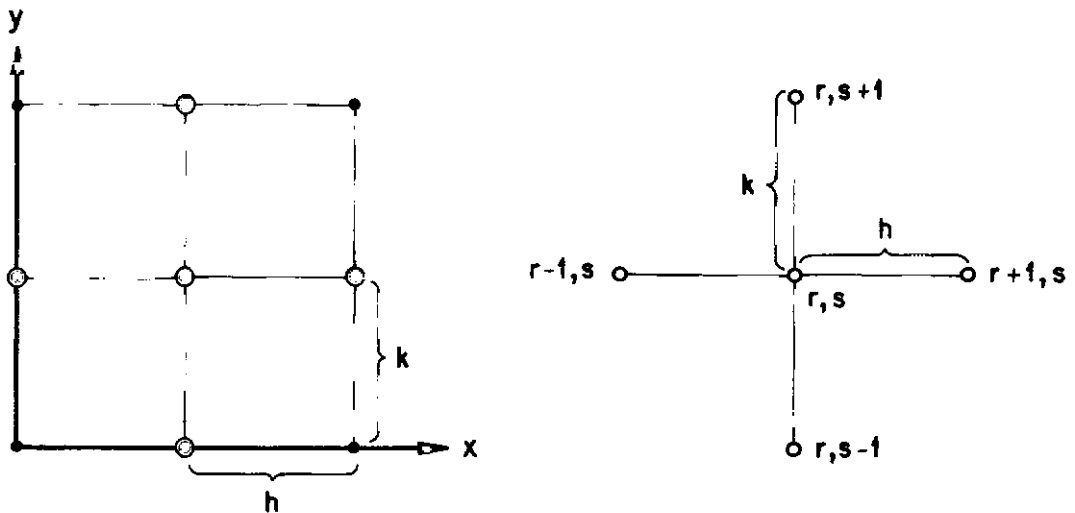


Figura III.2 - Malha de diferenças finitas bi-dimensionais para um modelo de cinco pontos.

$$u_x \Big|_r \approx \frac{\delta u_r}{h} = \frac{1}{2h} (u_{r+1} - u_{r-1}). \quad (\text{III.12})$$

Seja, agora, a derivada de segunda ordem expressa em diferenças finitas centrais:

$$u_{xx} \Big|_r \approx \frac{\delta(\delta u_r)}{h^2} = \frac{\delta^2 u_r}{h^2}. \quad (\text{III.13})$$

Substituindo-se (III.10) e (III.11) em (III.13), são determinadas as diferenças finitas centrais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \delta^2 u_r &= \Delta u_r - \Delta u_{r-1} = (u_{r+1} - u_r) - (u_r - u_{r-1}) = \\ &= u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1} \approx h^2 u_{xx} \Big|_r. \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Expressões de aproximações em diferenças finitas ordinárias são apresentadas na Tabela (III.2) juntamente com as respectivas ordens de erro.

### III.3.3 - Diferenças Finitas Parciais

No cálculo das diferenças finitas parciais de uma função, em relação a qualquer das variáveis  $x$  e  $y$ , são válidas as expressões vistas no item 3.2.3 referentes às diferenças finitas ordinárias.

Tab.III.2 - Aproximações em diferenças finitas em uma variável independente

DERIVADAS	APROXIMAÇÃO EM DIFERENÇAS FINITAS	ORDEM DE ERRO
$u_x \Big _r$	$\frac{1}{h} \cdot [u_{r+1} - u_r]$	$O(h)$
	$\frac{1}{h} \cdot [u_r - u_{r-1}]$	$O(h)$
	$\frac{1}{2h} \cdot [u_{r+1} - u_{r-1}]$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{2h} \cdot [-u_{r+2} + 4u_{r+1} - 3u_r]$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{12h} \cdot [-u_{r+2} - 8u_{r+1} - 8u_{r-1} + u_{r-2}]$	$O(h^2)$
$u_{xx} \Big _r$	$\frac{1}{h^2} \cdot [u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}]$	$O(h^2)$
$u_{xxx} \Big _r$	$\frac{1}{2h^3} \cdot [u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}]$	$O(h^2)$
$u_{xxxx} \Big _r$	$\frac{1}{h^4} \cdot [u_{r+2} - 4u_{r+1} + 6u_r - 4u_{r-1} + u_{r-2}]$	$O(h^2)$

Para obter-se a diferença finita mista em relação a  $x$  e  $y$ , calcula-se inicialmente a diferença em uma direção e depois a diferença da primeira diferença na outra direção.

Seja a derivada parcial  $u_{xy}$  no ponto  $(r,s)$  da Figura III.2:

$$u_{xy} \Big|_{r,s} = \left( u_y \Big|_{r,s} \right)_x \quad (\text{III.15})$$

Obtém-se da Tabela (III.2) uma representação em diferenças finitas para (III.15), como se segue:

$$\left( u_y \Big|_{r,s} \right)_x = \frac{1}{2h} \left[ u_y \Big|_{r,s} - u_y \Big|_{r-1,s} \right] + O(h^2). \quad (\text{III.16})$$

As derivadas em  $y$  podem agora ser aproximadas de forma análoga. Assim:

$$u_{xy} \Big|_{r,s} = \frac{1}{2h} \frac{[u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1}]}{2k} + O(h^2) + O(k^2). \quad (\text{III.17})$$

Sendo  $k$  e  $h$  iguais, a equação (III.17) pode ser reescrita sob a forma

$$u_{xy} \Big|_{r,s} = \frac{1}{4h^2} [u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1}] + O(h^2). \quad (\text{III.18})$$

As aproximações em diferenças finitas mais usuais para as derivadas parciais são representadas na Tabela (III.3).

Tab.III.3 - Aproximações em diferenças finitas em duas variáveis independentes com  $h = k$  (Figura III.2)

DERIVADAS	APROXIMAÇÃO EM DIFERENÇAS FINITAS	ORDEM DE ERRO
$u_x \Big _{r,s}$	$\frac{1}{h} \cdot [u_{r+1,s} - u_{r,s}]$	$O(h)$
	$\frac{1}{h} \cdot [u_{r,x} - u_{r-1,s}]$	$O(h)$
	$\frac{1}{2h} \cdot [u_{r+1,s} - u_{r-1,s}]$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{2h} \cdot [-u_{r+2,s} + 4u_{r+1,s} - 3u_{r,s}]$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{4h} \cdot [u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s-1}]$	$O(h^2)$
$u_{xx} \Big _{r,s}$	$\frac{1}{h^2} \cdot [u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}]$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{12h^2} \cdot [-u_{r+2,s} + 16u_{r+1,s} - 30u_{r,s} + 16u_{r-1,s} - u_{r-2,s}]$	$O(h^2)$
$u_{xy} \Big _{r,s}$	$\frac{1}{4h^2} \cdot [u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1}]$	$O(h^2)$
$u_{xxyy} \Big _{r,s}$	$\frac{1}{h^4} \cdot [u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1} - 2u_{r+1,s} - 2u_{r-1,s} - 2u_{r,s+1} - 2u_{r,s-1} + 4u_{r,s}]$	$O(h^2)$

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS À ANÁLISE LINEAR DE PLACAS COM CONTORNO ARBITRÁRIO

#### IV.1 - Introdução

O conhecimento que se tem da utilização do método variacional no desenvolvimento de operadores diferenciais remonta a muitos anos atrás. Cita-se o trabalho clássico de COURANT, FRIEDRICHS e LEWY [3], no qual é adotado um procedimento variacional na geração de expressões de diferenças finitas para operadores harmônicos e bi-harmônicos. De acordo com os pesquisadores, equações em diferenças finitas para problemas elípticos, auto-adjuntos de valor de contorno podem ser formuladas através de um sistema simétrico, mediante uma função quadrática das variáveis dependentes. Entretanto, como já se disse anteriormente, apenas recentemente tem esta idéia recebido atenção significativa e aplicação [4, por exemplo].

A formulação que aqui se desenvolve deve ser vista como uma extensão do método variacional, estabelecendo-se operadores para a análise de placas delgadas com contornos arbitrários. Introduz-se como inovação um esquema organizado de tratamento da geometria e cálculo da energia potencial [29], particularmente adaptado a placas.

À semelhança do método numérico de elementos finitos, este procedimento recorre à utilização de princípio variacional.

Entretanto, verificar-se-á em etapas seguintes que algumas de suas características, tais como escolha de variáveis discretas e o modo com que se avaliam as integrais, diferem daquelas relativas a elementos finitos correspondentes.

A sistematização desse método é feita mediante a introdução do conceito de "elementos", e da montagem de matrizes a estas relacionadas. Os termos destas matrizes são determinados em relação a um sistema de referência local, e posteriormente transformados, de forma a poder-se usar um sistema de referência (global) para todos os elementos. Desta forma, poder-se-ão formar matrizes globais, assim como na formulação do método dos elementos finitos.

Desde que derivadas podem ser expressas em termos de valores da função em pontos discretos, a aproximação por diferenças finitas pode ser utilizada juntamente com equações de equilíbrio ou com o funcional de energia. As derivadas dos deslocamentos na expressão de energia potencial total  $\Pi$  do sistema podem ser aproximadas por diferenças finitas nos pontos nodais da malha. Se é utilizada a aproximação por energia, sua densidade é determinada em cada ponto discreto, e a energia potencial total é obtida mediante integração numérica.

A condição de mínimo de  $\Pi$  é utilizada para calcularem-se os parâmetros incógnitos de deslocamento. Assim, o conjunto final de equações algébricas é obtido através da minimização do funcional de energia em relação aos deslocamentos nodais da malha. Como a formulação variacional do problema é empregada, somente as condições de contorno geométricas ou essenciais, corres



pondentes na mecânica estrutural aos deslocamentos e rotações prescritos, necessitam ser atendidas. Diferentemente, as condições de contorno relativas aos momentos e forças prescritas, ditas naturais, são automaticamente satisfeitas.

Um dos maiores méritos da aplicação de métodos variacionais em problemas discretos decorre da geração de matrizes simétricas. Uma outra vantagem é a de que, por considerações físicas da expressão de energia, as matrizes obtidas são positivas definidas. Desnecessário é mencionar que a utilização de matrizes simétricas positivas definidas possibilita simplificações consideráveis no processo de resolução numérica de equações simultâneas.

Com a utilização da energia potencial total, o problema de flexão de placas reduz-se à determinação da função de deslocamento  $w$  de  $x$  e  $y$ , que atenda às condições geométricas fornecidas e torne um mínimo a integral que expressa esta energia.

#### IV.2 - Energia Potencial da Placa

O princípio da energia potencial total estabelece que, numa configuração de equilíbrio estável, a energia potencial total é um mínimo. Com base neste princípio, verifica-se que a energia total no caso de flexão de placas é obtida pela contribuição de uma parcela proveniente da deformação (flexão e torção), e de uma outra associada à posição das cargas atuantes no domínio em questão e no seu contorno.

Considerando-se a teoria das placas delgadas [ 33 ], a expressão da energia potencial total de uma placa isôtropa de região R pode ser expressa, para o caso de cargas transversais apenas no domínio, como

$$\begin{aligned} \Pi = U + V = \frac{1}{2} \iint_R D \left[ w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) w_{xy}^2 \right] dx dy - \iint_R p w dx dy \quad . \end{aligned} \quad (IV.1)$$

A expressão da energia de deformação U em notação matricial é obtida aplicando-se as deformações generalizadas (II.3), e suas relações (II.8) com os deslocamentos, na equação (IV.1).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} - w_{xx} \\ - w_{yy} \\ - 2 w_{xy} \end{bmatrix} \quad (II.3) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (II.8) \end{aligned}$$

A matriz de elasticidade  $\underline{\underline{D}}$ , na expressão (II.8), é suposta representativa das propriedades elásticas de materiais isôtropos, conforme se apresenta em (II.9).

Obtêm-se então

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} \, dA \quad (\text{IV.2})$$

ou ainda,

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon} \, dA. \quad (\text{IV.3})$$

A área elementar  $dA$  no plano  $xy$ , referida em (IV.2) e (IV.3), é dada por

$$dA = dx \, dy. \quad (\text{IV.4})$$

Para fins de avaliação da energia potencial no presente método, é necessária a consideração das três etapas a seguir: (1) utilização de um número finito de pontos discretos, atribuindo-lhes incógnitas de deslocamento transversal  $w$ ; (2) a subdivisão do plano  $xy$  em  $I$  áreas  $A_i$ ; (3) o desenvolvimento de esquemas de diferenças finitas para o cálculo das deformações em termos de incógnitas discretas. Por se apresentarem inter-relacionados, os itens descritos serão tratados posteriormente, em conjunto.

O método aqui proposto baseia-se na utilização de uma malha formada por quadriláteros, não necessariamente uniformes. Todavia, este procedimento poderá ser generalizado, de forma a permitir-se a adoção de figuras não quadriláteras. Verifica-se, em exemplos, que o presente método é suficientemente flexível para tratamento de diversas formas de contorno.

A esta altura, considera-se simplesmente que um número total  $J$  de valores de deslocamento transversal seja atribuído a diversos pontos discretos, identificando-se cada um destes valores por  $\delta_j$  onde  $j = 1, 2, \dots, J$ . Desta forma, tem-se o vetor  $\underline{\delta}$  representativo dos deslocamentos transversais, definido como

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \end{bmatrix} . \quad (\text{IV.5})$$

As expressões (IV.3) e (IV.5), permitem escrever a equação (IV.1) na forma matricial

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \iint_R \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon} \, dA - \underline{\delta}^T \underline{Q} , \quad (\text{IV.6})$$

onde  $\underline{Q}$  representa o vetor das forças externas.

Objetiva-se a determinação das relações de deformação generalizada - deslocamento em variáveis discretas, que correspondam àquelas relações (II.3) aplicadas ao contínuo. Observa-se que o desenvolvimento dessas relações de variáveis discretas, a partir das referidas ao contínuo, envolverá naturalmente algum esquema de interpolação e erro procedente de truncamento. Uma vez que a descrição do posicionamento e a seleção de pontos discretos

é feita posteriormente, e desde que esquemas diversos de diferenças finitas podem ser utilizados, as relações procuradas serão também discutidas em outro item. Supõe-se, por agora, que estas sejam providas de erro de truncamento da ordem  $h$  ou  $h^2$ , ( $h \rightarrow 0$ ), e representadas na seguinte forma discreta:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{\delta} + O(h^n) \quad n = 1 \text{ ou } 2, \quad (\text{IV.7})$$

sendo  $\underline{L}$  um operador diferencial de segunda ordem.

Utilizando-se a equação (IV.7), pode-se reescrever a expressão (IV.6) como

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \left( \int_R \underline{\delta}^T \underline{L}^T \underline{D} \underline{L} \underline{\delta} \, dA - \underline{\delta}^T \underline{Q} + O(h^n) \right) \quad n=1 \text{ ou } 2 \quad (\text{IV.8})$$

Ressalte-se que devido a esparsidade da matriz  $\underline{L}$ , nenhuma redução cumulativa da ordem de erro ocorre na multiplicação de matrizes quando substitui-se a equação (IV.7) em (IV.6).

### IV.3 - Minimização da Energia Potencial

Pretende-se a determinação do vetor  $\underline{\delta}$  que minimize a energia potencial  $\Pi$  (IV.6) e, ao mesmo tempo, atenda às restrições introduzidas pelas condições geométricas de contorno.

Citam-se, em geral, dois métodos de minimização da energia potencial  $\Pi$ , quando estão envolvidas restrições: (1) redução do número de incógnitas em etapa que precede a minimização, e (2) utilização de multiplicadores de Lagrange [ 38, 39, 40 ]. Ado

tar-se-ã a primeira proposição, face às suas vantagens computacionais.

Embora a descrição do processo de distribuição de pontos discretos seja apresentada no item seguinte, expõe-se aqui o método de redução do número de incógnitas. Através da utilização de esquemas apropriados de interpolação, podem ser escritas relações algébricas representativas das condições de contorno geométricas em pontos situados no contorno. Tais relações algébricas são expressas na seguinte forma matricial:

$$\underline{\delta}_b = \underline{G} \underline{\delta}_a + \underline{r} + O(h^n) \quad n = 1 \text{ ou } 2, \quad (\text{IV.9})$$

onde  $\underline{\delta}_a$  e  $\underline{\delta}_b$  são formas particionadas do vetor de deslocamentos  $\underline{\delta}$ , dado por

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_a \\ \text{-----} \\ \underline{\delta}_b \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.10})$$

$\underline{G}$  representa uma matriz cujos coeficientes dependem do esquema de interpolação adotado e  $\underline{r}$  é um vetor associado às forças externas aplicadas ao pontos.

O número de elementos em  $\underline{\delta}_a$  é simbolizado por  $\hat{J}$ , sendo o número total de elementos em  $\underline{\delta}$  previamente indicado por  $J$ . Consequentemente, reduz-se o número de incógnitas de  $J$  para  $\hat{J}$ , através da introdução de  $J - \hat{J}$  restrições especificadas em equações. A equação (IV.9) é então utilizada para eliminar-se  $\underline{\delta}_b$  da equação

matricial (IV.8). Obtém-se como resultado de tal eliminação, após algumas manipulações algébricas, a expressão seguinte:

$$\Pi = \Pi_0(\delta_a) + O(h^n) \quad n = 1 \text{ ou } 2 \quad (\text{IV.11})$$

onde

$$\Pi_0(\delta_a) = \frac{1}{2} \iint_R \delta_a^T (\hat{L}^T D \hat{L}) \delta_a dA - \delta_a^T Q$$

$$\hat{L} = L_a + L_b G$$

$$Q = Q_a + Q_b G$$

$L_a$ ,  $L_b$ ,  $Q_a$  e  $Q_b$  são formas particionadas de  $L$  e  $Q$ , respectivamente, como se mostra para  $L$ :

$$L = \begin{bmatrix} L_a & | & L_b \end{bmatrix},$$

onde  $L_a$  contém  $\hat{J}$  colunas, e  $L_b$  contém  $J - \hat{J}$  colunas.

Ressalte-se a existência de técnicas computacionais como a que é discutida no Capítulo V, que facilitam a consideração computacional das referidas condições de contorno.

Uma vez eliminadas as  $J - \hat{J}$  incógnitas associadas às restrições, procede-se à minimização direta da quantidade  $\Pi_0(\delta_a)$  na equação (IV.11), diferenciando-a sucessivamente em relação a

cada um dos  $\hat{J}$  elementos,  $\delta_j$ , do vetor  $\delta_a$ . O conjunto resultante de equações algébricas lineares é então obtido da condição

$$\delta(U + V) = \delta(\Pi_0) = 0 \quad , \quad (\text{IV.12})$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \delta_a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial \delta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial \delta_j} \end{bmatrix} = 0 \quad . \quad (\text{IV.13})$$

Reescrevendo-se estas expressões em notação matricial, obtém-se

$$\left( \int \int_R \hat{\underline{L}}^T \underline{D} \hat{\underline{L}} \delta_a \, dA - \hat{\underline{Q}} \right) = 0 \quad (\text{IV.14})$$

ou de forma mais condensada,

$$\underline{K} \delta_a - \hat{\underline{Q}} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

sendo

$$\underline{K} = \left( \int \int_R \hat{\underline{L}}^T \underline{D} \hat{\underline{L}} \, dA \right) \quad (\text{IV.16})$$



Naturalmente, aumentando-se o número de incógnitas reduz-se o valor  $h$ , e a solução discreta  $\delta_a$  converge para uma contínua, com as propriedades analíticas supostas na derivação. Desta forma, no limite  $h \rightarrow 0$ , a solução  $\delta_a$  representará sempre um valor mínimo da energia potencial total  $\Pi$ . Conclui-se, portanto, que a solução obtida no limite, sob as condições citadas, atenderá também às equações de Euler associadas à energia potencial no contínuo, expressa em (IV.1). TONG e PIAN [41] apresentaram observações análogas a respeito da convergência no método dos elementos finitos. Verifica-se que os fundamentos expostos da convergência no método dos elementos finitos são similares àqueles próprios da resolução de equações diferenciais pelo processo das diferenças finitas convencionais. De outra forma, pode-se afirmar que se no limite  $h \rightarrow 0$  a solução numérica aproxima uma solução que tenha as necessárias propriedades analíticas, então, neste limite, a primeira atende à equação diferencial.

Em decorrência da própria formulação variacional, conforme já se teve ocasião de mencionar,  $K$  é uma matriz simétrica. Tal característica implica em significativas vantagens computacionais, e pode ser constatada pela simples consideração da forma transposta da equação (IV.16).

Vale dizer que sob considerações físicas, a expressão da energia (IV.11) deve ser sempre positiva para toda estrutura adequadamente vinculada. Também é sabido que a forma quadrática obtida com os coeficientes de uma matriz positiva definida fornece sempre um resultado positivo. Segue-se que pelas duas razões citadas, a matriz  $K$  também é positiva definida.

#### IV.4 - Nós, Áreas e Esquemas de Diferenças Finitas

Considere-se o plano infinito de uma região bi-dimensional subdividido por duas famílias de linhas paralelas, constituindo uma malha de estrutura retangular. Sejam as linhas desta malha definidas por  $x = \xi h$  e  $y = \eta h$  ( $\xi, \eta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), e considerem-se os pontos localizados em suas interseções. Denominam-se nós da malha os pontos de interseção em  $\bar{R} = R \cup C$  (sendo  $C$  o contorno), e designam-se por células os menores retângulos contornados por quatro segmentos de linha.

Segundo FORSYTHE e WASOW [4], em uma malha de estrutura retangular, derivadas primeiras e segundas de uma variável dependente podem ser aproximadas em todos os pontos nodais, utilizando-se um modelo constituído de nove nós (Figura IV.1) e as fórmulas usuais de diferenças finitas. Para cada ponto de coordenadas nodais  $i, j$ , consideram-se outros oito vizinhos  $i-1, j-1$ ;  $i, j-1$ ;  $i+1, j-1$ ;  $i-1, j$ ;  $i+1, j$ ;  $i-1, j+1$ ;  $i, j+1$ ;  $i+1, j+1$  da malha formada por linhas horizontais e verticais, espaçadas com intervalos não necessariamente iguais. As seis linhas referidas são  $x = x_{i,j} - \eta_{j-1} h$ ,  $x = x_{i,j}$ ,  $x = x_{i,j} + \eta_j h$  e  $y = y_{i,j} - \xi_{i-1} h$ ,  $y = y_{i,j}$ ,  $y = y_{i,j} + \xi_i h$ .

O modelo apresentado pode ser posicionado em qualquer nó da malha, e fórmulas de diferenças finitas são utilizadas para construir-se uma equação algébrica genérica que represente uma equação diferencial parcial de segunda ordem no domínio em questão.

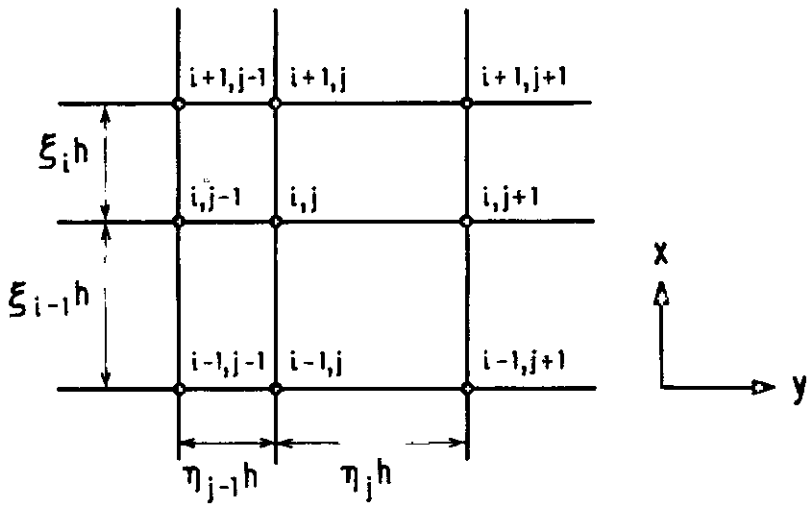


Fig. IV - 1 - Modelo de nove nós para a malha retangular irregular.

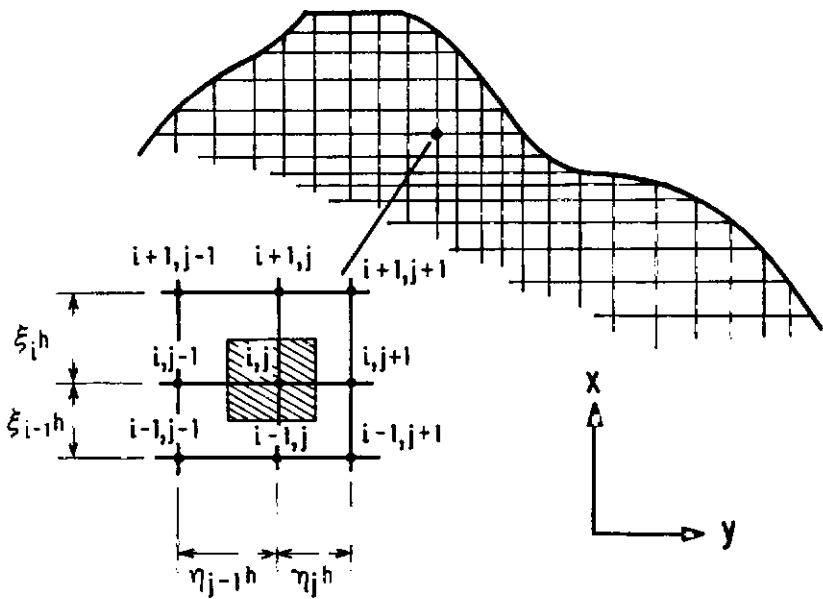


Fig. IV. 2 - Elemento associado a um ponto nodal de uma malha irregular.

Como em geral não se visualiza nenhum "elemento" definido, é de certa forma difícil intuir-se acerca de considerações físicas, no contexto das diferenças finitas convencionais. Entretanto, para fins de sistematização do método energético de diferenças finitas, faz-se necessária a subdivisão em áreas da região sobre a qual se estende a integral dupla (IV.1), constituindo-se assim os "elementos". Toma-se aqui por "elemento", o subdomínio hachuriado na Figura IV.2, constituído por um quarto da área relativa a cada célula do modelo. O integrando da expressão (IV.1) é então avaliado somente em um ponto nodal dentro de cada "elemento". Sendo assim, a energia potencial total deste último é obtida pela multiplicação da densidade de energia avaliada no seu ponto central pela área elementar. Mediante uma representação global, são consideradas em conjunto as contribuições dos diversos elementos.

A energia de deformação no caso de flexão de placas divide-se em uma parcela devida a momentos fletores e expressa em diferenças finitas diretas e numa outra, em diferenças finitas cruzadas, proveniente de momentos de torção. Com a finalidade de se facilitar o estudo e implementação considera-se, neste trabalho, que as duas formas de energia de deformação (flexão e torção) sejam calculadas utilizando-se diferentes pontos do mesmo modelo.

Observa-se que no modelo descrito, ao contrário dos elementos finitos, a localização de seus nós não é restrita ao subdomínio concebido como elemento.

De acordo com COLLATZ [2], as aproximações de derivadas por diferenças finitas centrais são substancialmente melhores do que as por diferenças progressivas e regressivas, não obstante freqüentemente ocasionem alguma propagação de erro. FORSYTHE e WASOW afirmam que a utilização de diferenças finitas centrais, em um modelo igualmente espaçado, implica na redução da ordem de erro de  $O(h)$  para  $O(h^2)$ , (quando  $h \rightarrow 0$ ).

Constata-se que a existência de pontos nodais fora da região  $\bar{R}$  considerada é necessária para a avaliação da energia de deformação por diferenças finitas centrais, em pontos situados no contorno.

Com o propósito de discutirem-se aproximações de derivadas por diferenças finitas em malhas de estruturas retangulares, serão descritas algumas fórmulas apresentadas por KANTOROVICH e KRYLOV [42]. Ressalte-se que não será abordada aqui a aplicação destas em pontos adjacentes a um contorno irregular ou curvo. A utilização do modelo flexível, que se apresenta no item seguinte, possibilita abrangerem-se todos os nós de uma maneira única, evitando-se a consideração de casos específicos, como os apresentados, por exemplo, em [10, 43].

Supõe-se que  $u(i, j+1)$ ,  $u(i, j)$ , etc., na Figura IV.1, representem os valores da função  $u(x, y)$  em  $i, j+1$ ;  $i, j$ ; etc. Seja  $h_1 = \max (\xi_i h, \xi_{i-1} h, \eta_{j-1} h, \eta_j h)$ . Denomina-se  $M_k(I)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) o maior valor em módulo das derivadas de ordem  $k$ , no intervalo ou região considerada.

Considere-se  $I$  o intervalo aberto de  $i-1, j$  a  $i+1, j$ . Supõe-se aqui  $u$ ,  $u_x$  e  $u_{xx}$  contínuas no intervalo fechado  $\bar{I}$  e,  $u_{xxx}$  contínua em  $I$ . Segue-se que

$$u_x(i, j) = \frac{\xi_{i-1}^{-1} \left[ u_{i+1, j} - u_{i, j} \right] + \xi_i^{-1} \left[ u_{i, j} - u_{i-1, j} \right]}{h(\xi_i + \xi_{i-1})} +$$

$$+ R'_x(i, j) =$$

$$= \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i h(\xi_i + \xi_{i-1})} u_{i+1, j} + \frac{(\xi_i - \xi_{i-1})}{h \xi_i \xi_{i-1}} u_{i, j} -$$

$$- \frac{\xi_i}{\xi_{i-1} h(\xi_i + \xi_{i-1})} u_{i-1, j} \quad , \quad (IV.17)$$

onde

$$R'_x(i, j) = - \frac{h^2 \xi_i \xi_{i-1}}{6} u_{xxx}(\lambda, y_{i, j}), \quad x_{i, j} -$$

$$- \xi_{i-1} h < \lambda < x_{i, j} + \xi_i h \quad . \quad (IV.18)$$

Se  $h_1 \geq \max(\xi_i h, \xi_{i-1} h)$ ,

$$\left| R'_x(i, j) \right| \leq \frac{1}{6} h_1^2 M_3(i) \quad . \quad (IV.19)$$

Considerando-se  $\xi_i h = \xi_{i-1} h = h_1$

$$u_x(i, j) = \frac{u_{i+1, j} - u_{i-1, j}}{2 h_1} + R_x'(i, j) , \quad (\text{IV.20})$$

onde

$$R_x'(i, j) = - \frac{1}{6} h_1^2 u_{xxx}(\lambda, y_{i, j}) , \quad x_{i, j} - h_1 < \lambda < x_{i, j} + h_1 . \quad (\text{IV.21})$$

$$|R_x'(i, j)| \leq \frac{1}{6} h_1^2 M_3(I) . \quad (\text{IV.22})$$

Sejam  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_{xx}$  e  $u_{xxx}$  contínuas em  $\bar{I}$  e  $u_{xxxx}$  contínua em  $I$ . Assim,

$$u_{xx}(i, j) = \frac{\left[ \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\xi_i h} \right] - \left[ \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{\xi_{i-1} h} \right]}{(\xi_i + \xi_{i-1}) \frac{h}{2}} + R_x''(i, j) = \quad (\text{IV.23})$$

$$= 2 \frac{u_{i+1, j}}{\xi_i h^2 (\xi_i + \xi_{i-1})} - \frac{u_{i, j}}{\xi_i \xi_{i-1} h^2} + \frac{u_{i-1, j}}{\xi_{i-1} h (\xi_i + \xi_{i-1})} + R_x''(i, j)$$

onde

$$Rx''(i,j) = \frac{(\xi_{i-1} - \xi_i)h}{3} u_{xxx}(i,j) - \frac{(\xi_{i-1}^2 - \xi_i \xi_{i-1} + \xi_i^2)h^2}{12} u_{xxxx}(\lambda, y_{i,j}) , \quad (IV.24)$$

$$x_{i,j} - \xi_{i-1}h < \lambda < x_{i,j} + \xi_i h .$$

$$\text{Se } h_1 \geq \max (\xi_{i-1}h, \xi_i h) ,$$

$$|Rx''(i,j)| \leq \frac{1}{3} h_1 M_3(I) + \frac{1}{12} h_1^2 M_4(I) . \quad (IV.25)$$

$$\text{Considerando-se } \xi_i h = \xi_{i-1} h = h_1 ,$$

$$u_{xx}(i,j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + Rx''(i,j) , \quad (IV.26)$$

onde

$$Rx''(i,j) = - \frac{h_1^2}{12} u_{xxxx}(\lambda, y_{i,j}) , \quad x_{i,j} - h_1 < \lambda < x_{i,j} + h_1 . \quad (IV.27)$$

De outra forma,

$$|Rx''(i,j)| \leq \frac{1}{12} h_1^2 M_4(I) . \quad (IV.28)$$

Os resultados fornecidos em (IV.22) e (IV.25) mostram a vantagem de se utilizarem malhas com intervalos iguais, quando então a ordem de erro das expressões reduz-se de  $O(h)$  para  $O(h^2)$ .



Seguem-se fórmulas para derivadas em diferenças finitas centrais, utilizando-se um modelo de nove nós constituído de linhas igualmente espaçadas (Figura IV.4). Como já é sabido, tais expressões são providas de termos de erro da forma  $CM_3h^2$  e  $C_1M_4h^2$  conforme representam derivadas primeiras e segundas, respectivamente. Seguindo-se a notação da figura, escrevem-se em termos da função  $u$  definida sobre a malha:

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= h^{-2} \left[ u_8 - 2u_3 + u_2 \right] \\
 u_{yy} &= h^{-2} \left[ u_4 - 2u_5 + u_6 \right] \\
 u_{xy} &= h^{-2} \left[ u_9 - u_3 + u_1 - u_7 \right] \\
 u_x &= h^{-1} \left[ u_8 - u_2 \right] \\
 u_y &= h^{-1} \left[ u_6 - u_4 \right].
 \end{aligned} \tag{IV.29}$$

A esta altura, já se pode indicar um esquema conveniente para relações algébricas de deslocamentos em pontos discretos sobre uma placa. A Figura IV.3 indica pontos com deslocamentos transversais simbolizados por  $w$ , localizados nas interseções de linhas coordenadas de superfície uniformemente espaçadas. Constitui-se, desta maneira, uma malha destinada à discretização de placas. Mediante a utilização do modelo proposto na Figura IV.4, asseguram-se representações precisas em diferenças finitas centrais para derivadas segundas de  $w$ .

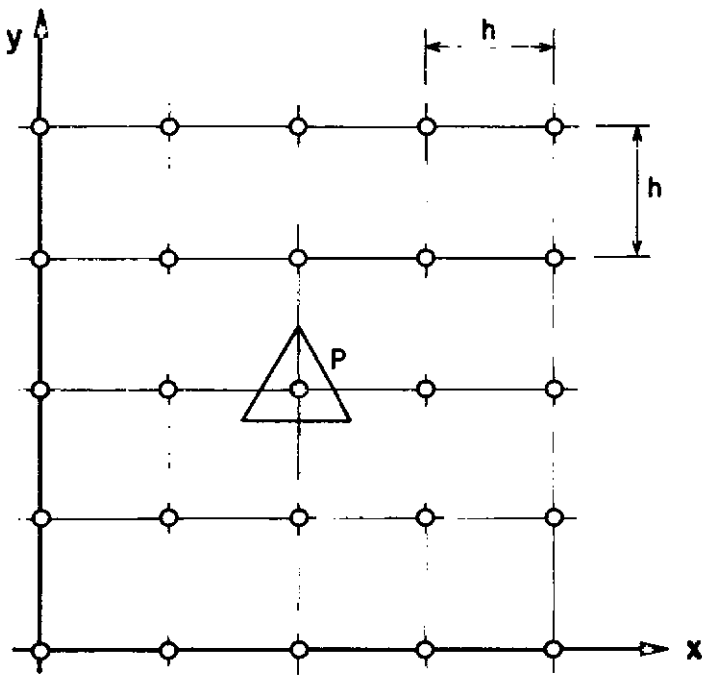


Figura IV.3 - Malha de diferenças finitas para discretização de placas.

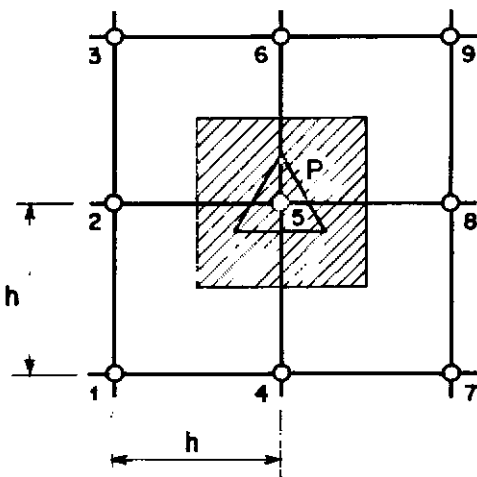


Figura IV.4 - Modelo quadrado de nove nós.

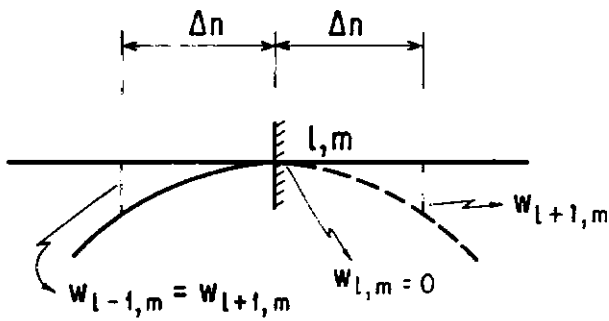
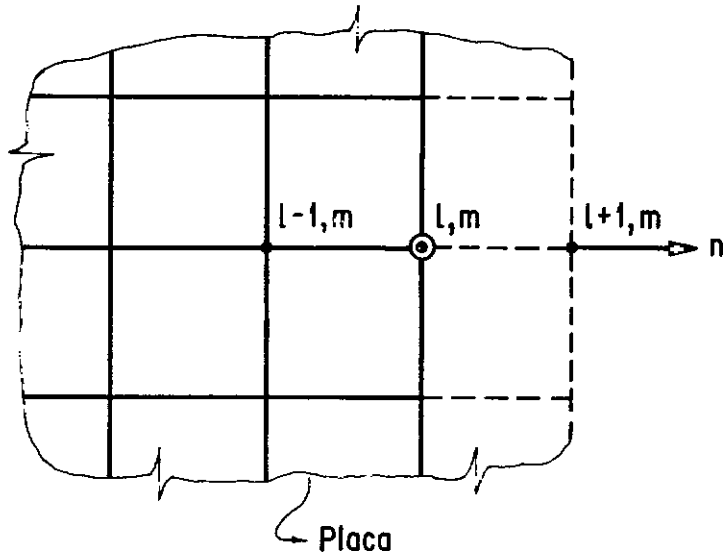
#### IV.5 - Condições de Contorno

Conforme já se mencionou, uma vez utilizada a formulação variacional, somente são prescritas as condições de contorno geométricas, prescindindo-se de atender às naturais. São exigidos, para a solução de placas fracamente fletidas, dois parâmetros geométricos definindo as condições de contorno: uma translação vertical e uma rotação em relação à tangente ao bordo.

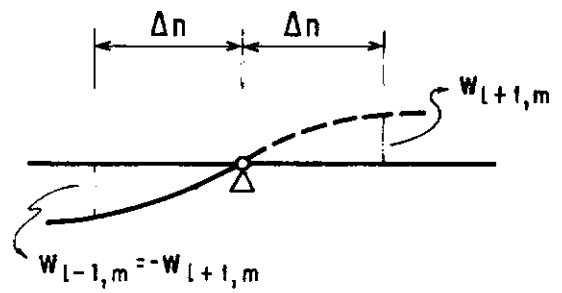
Prescreve-se a translação vertical, e as derivadas nas equações de condições de contorno são substituídas por expressões de diferenças finitas. As condições de contorno indicadas na Figura IV.5 são assim facilmente incorporadas. Ressalte-se que esta substituição só é possível considerando-se que o segmento  $\overline{km}$  (Figura IV.6), que une o nó fictício  $m$  ao seu correspondente  $k$  no domínio, coincida com a normal ao contorno  $C$  no ponto considerado. Admite-se aqui tal situação, uma vez que o modelo flexível a ser apresentado, permite que esta se verifique, sem que haja a necessidade de alterações. Desnecessário é dizer que, para isso, é importante o correto posicionamento dos pontos nodais.

Os deslocamentos transversais em bordos simplesmente apoiados ou engastados são igualados a zero pela eliminação das equações que lhes são relacionadas.

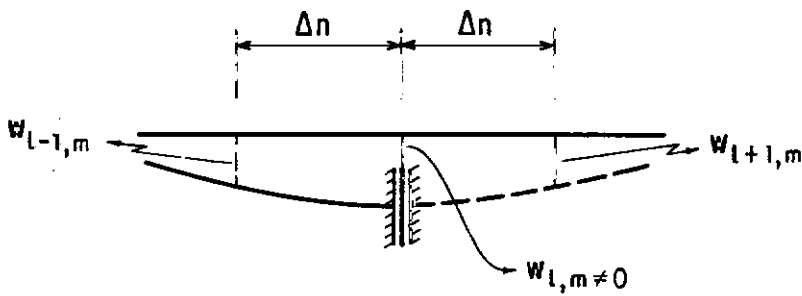
Considera-se inicialmente a condição de rotação nula, que traduz uma condição geométrica característica do engaste fixo ou deslocável (Figuras IV.5a e IV.5c). Seja a rotação nula



(a) ENGASTE



(b) APOIO



(c) ENGASTE DESLOCÁVEL

Figura IV.5 - Representação das condições de contorno em bordos retilíneos pelo método das diferenças finitas

$w_n$  no ponto de referência  $(\ell, m)$ , supondo-se  $n$  a normal ao contorno. A equação que traduz tal condição é expressa em diferenças finitas como

$$\left( w_n \right)_{\ell, m} = (2h)^{-1} \left[ w_{\ell+1, m} - w_{\ell-1, m} \right] = 0 \quad , \quad (\text{IV.30})$$

de onde se obtém

$$w_{\ell+1, m} = w_{\ell-1, m} \quad . \quad (\text{IV.31})$$

Verifica-se que pontos fictícios podem ser eliminados através de considerações de simetria. Assim, embora estes sejam introduzidos para se expressarem as condições de contorno por diferenças finitas centrais, nenhum deslocamento adicional é levado em consideração.

De forma similar pode ser tratada a condição de momento nulo, no caso de bordos retilíneos simplesmente apoiados. Por representar uma condição de contorno natural, sabe-se ser desnecessário fornecê-la. Porém, neste caso, tal procedimento possibilita consideráveis simplificações, como se pode verificar. Supõe-se  $t$  a direção tangente ao bordo da placa, e  $n$  a direção normal ao mesmo. Considera-se que o momento fletor  $M_n$  na direção normal seja nulo em  $(\ell, m)$  conforme se representa na Figura IV.5b. Segue-se que

$$\left( w_{nn} + \nu w_{tt} \right)_{\ell, m} = w_{\ell+1, m} + w_{\ell-1, m} = 0 \quad , \quad (\text{IV.32})$$

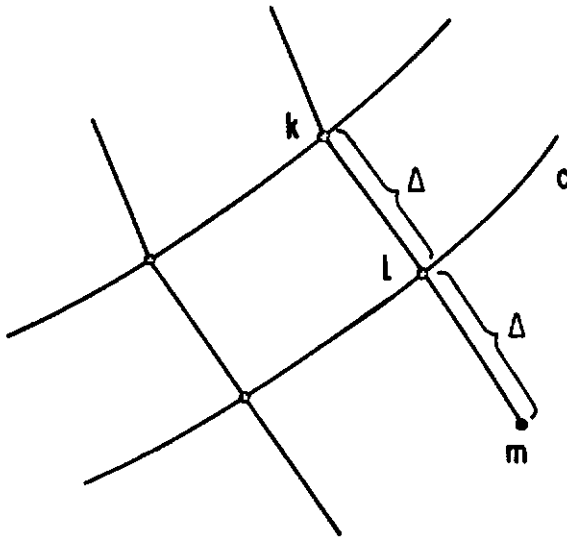


Fig. IV.6 - Discretização no contorno.

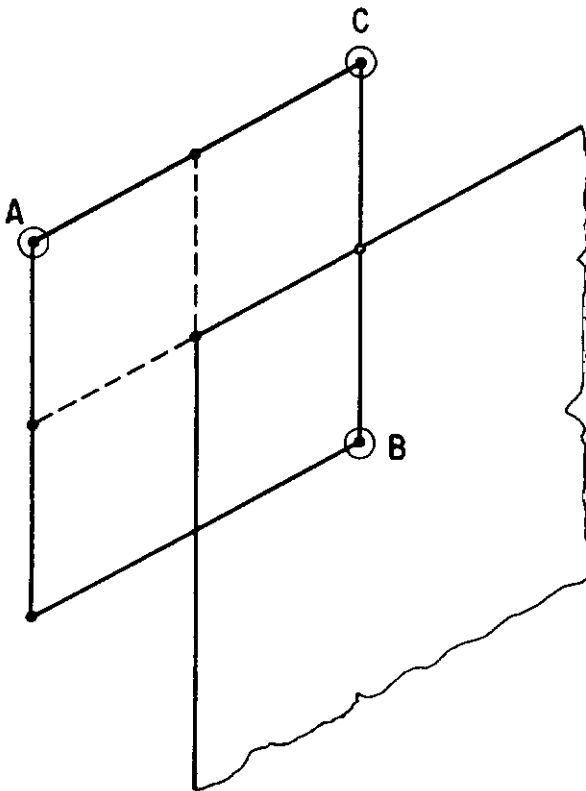


Fig. IV.7 - Modelo posicionado no canto da placa. Nós fictícios (A) e (C) e o correspondente no interno (B).

e assim

$$w_{\ell+1,m} = - w_{\ell-1,m} \quad (IV.33)$$

No caso de bordo livre, os pontos fictícios são retidos. Os deslocamentos associados a estes pontos, são tomados como uma extensão imaginária da placa além dos limites do contorno [ 29 ].

#### IV.6 - Considerações Sobre os Nós dos Cantos da Malha

Na falta de uma melhor maneira de referir os deslocamentos de nós virtuais dos cantos àqueles próprios de nós internos correspondentes, recorre-se a um artifício coerente. Imaginando-se então os bordos prolongados, e utilizando-se condições de contorno, são estabelecidas de forma aproximada as relações seguintes (Figura IV.7):

- dois bordos apoiados

$$w_A = w_B$$

- um bordo apoiado e outro engastado

$$w_A = - w_B \quad (IV.34)$$

- um bordo livre e outro apoiado

$$w_A = - w_C$$

- um bordo livre e outro engastado

$$w_A = w_C .$$

#### IV.7 - Considerações Sobre Simetria

A utilização apropriada da simetria estrutural e de carga pode trazer considerável economia de esforço computacional na análise de problemas de placas. São estudados neste trabalho dois processos de consideração de simetria, a saber:

1) primeiramente, o processo análogo ao convencional a apresentado por ALLEN [44]. A placa é interceptada por  $n$  planos de simetria, e a carga transversal é simétrica em relação a estes. Os referidos planos, não necessariamente ortogonais, dividem a placa em  $n$  setores simétricos entre si. É então necessário discretizar-se apenas um destes setores. Como os contornos interceptados pelas linhas de centro não consistem em bordos verdadeiros, não existirão, neste caso, pontos fictícios. De acordo com ALLEN, faz-se necessária a modificação dos esquemas de diferenças finitas nas vizinhanças destas linhas, duplicando-se valores de incógnitas em determinados pontos nodais (Figura IV.8);

2) agora, apresenta-se um processo alternativo no âmbito das diferenças finitas energéticas. Permite-se a substituição da estrutura original por uma outra, consistindo de um dos setores simétricos que subdividem a primeira (Figura IV.9). Recorre-se, para isto, à utilização de engastes deslocáveis ao longo dos planos de simetria que delimitam esta nova estrutura. É sabido que este processo é usualmente apresentado com todas as



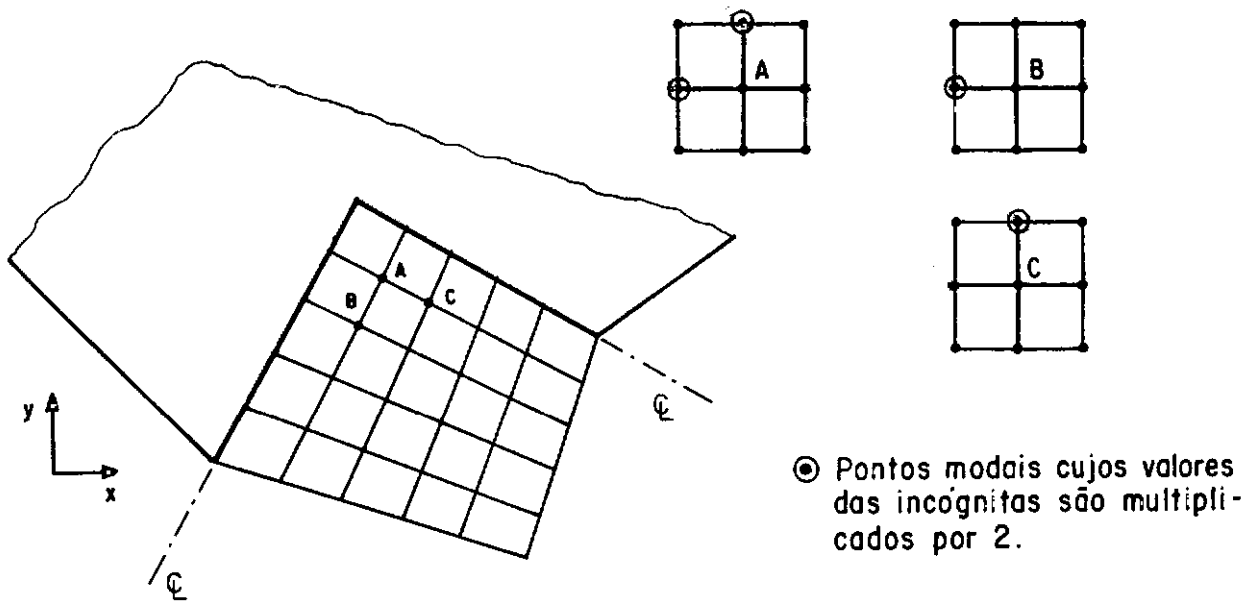


Fig. IV.8 - Modelos modificadas em pontos vizinhos aos planos de simetria.

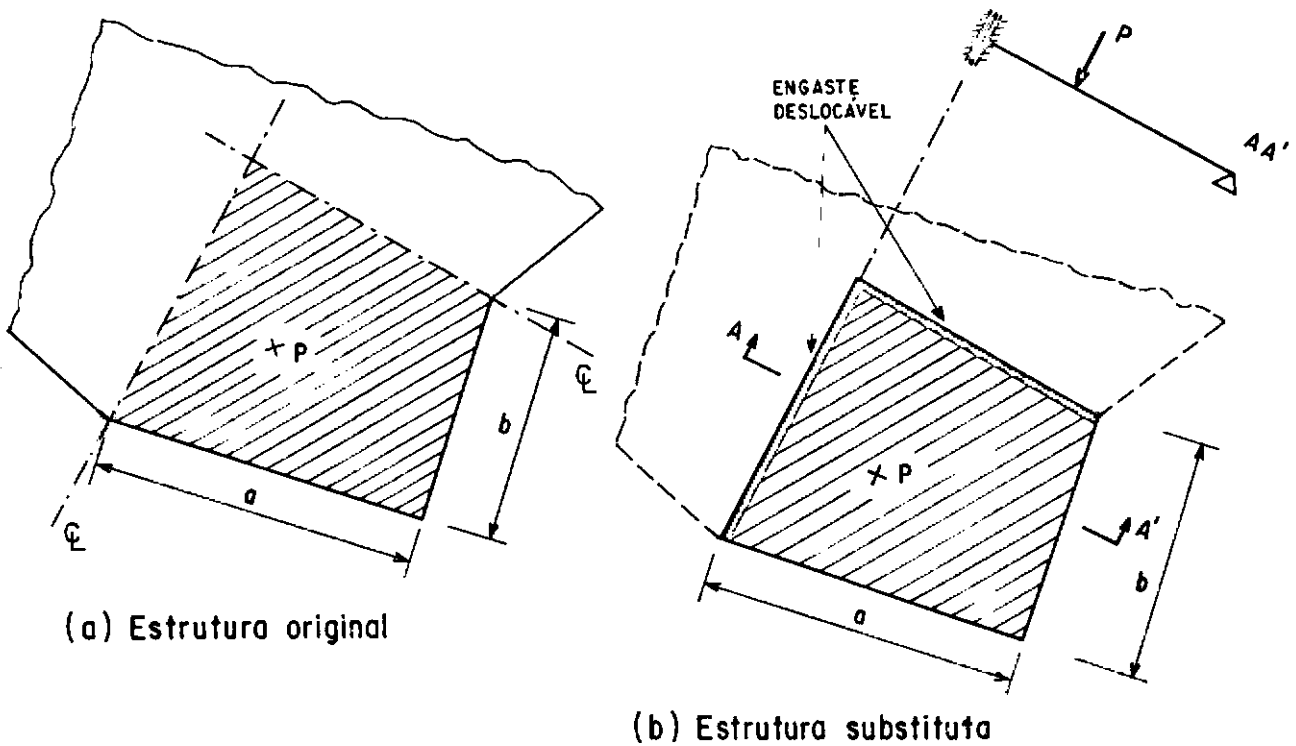


Fig. IV.9 - Consideração de uma estrutura substituta da original, mediante introdução de engastes deslocáveis ao longo dos planos de simetria.

condições de bordo prescritas. Todavia, a condição de rotação nula em relação à tangente ao bordo é aqui representada por expressões de diferenças finitas utilizando-se pontos fictícios. Os deslocamentos próprios destes pontos são facilmente assimilados aos internos correspondentes, conforme se expôs no item anterior.

Verifica-se que os dois procedimentos se equivalem, naturalmente, em termos de considerações físicas de contorno. Todavia, ressalte-se que o cômputo da energia não é idêntico nos dois casos. No primeiro processo, o funcional é estabelecido de tal maneira que são geradas equações idênticas àquelas obtidas sem a consideração de simetria. Entretanto no segundo caso, tais equações apresentam diferenças face a substituição a priori do modelo estrutural por um outro equivalente.

#### **IV.8 - Definição do Modelo Flexível**

##### **IV.8.1 - Considerações Gerais**

FREY [25] sugere que o modelo para discretização de placas representado na Figura IV.4 seja flexível, de modo a ser utilizado para gerarem-se aproximações por diferenças finitas em domínios irregulares. Objetiva-se, deste modo, uma configuração de nós similar ao esquema anteriormente proposto, porém levemente distorcida. Torna-se possível, assim, a discretização de problemas de valor de contorno em regiões de bordos curvos ou irregulares, como se mostra na Figura I.4.

O modelo flexível é aplicado a cada nó da malha para gerarem-se equações em diferenças finitas representativas de equações diferenciais parciais e condições de contorno. De acordo com FREY, uma região local deve ser definida para cada nó, tomando-o como ponto central da mesma. Com a finalidade de abranger-se todo o contorno considerado, o sistema de coordenadas locais varia de região a região da placa. Todavia, observa o pesquisador, tais regiões podem ser associadas ao sistema de coordenadas globais através de relações de transformação de coordenadas. Obtém-se desta forma a transformação do modelo quadrado no plano de referência  $s, t$  para um curvilíneo no plano físico.

Seja a região  $R_{xy}$  do plano  $x, y$ , convenientemente denominada domínio físico. Considere-se uma transformação de coordenadas pela qual um elemento  $E$ , pertence a  $R_{xy}$ , é representado por um correspondente  $E'$  no plano de coordenadas locais  $s, t$ . Supõe-se  $E'$  como sendo um elemento quadrado ou retangular, e sua imagem física  $E$  um quadrilátero curvilíneo, como se mostra na Figura IV.10.

A transformação é definida pelas funções

$$x = x(s, t) , \quad y = y(s, t) , \quad (IV.35)$$

tendo como inversas

$$s = s(x, y) , \quad t = t(x, y) . \quad (IV.36)$$

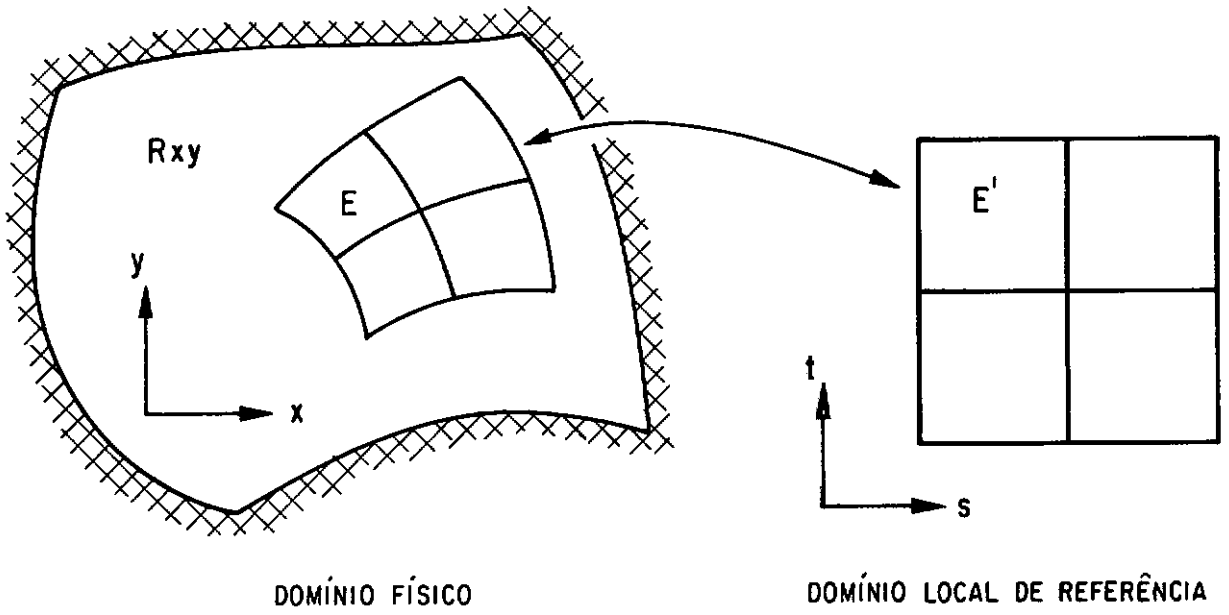


Figura IV.10 - Plano de referência físico e local.

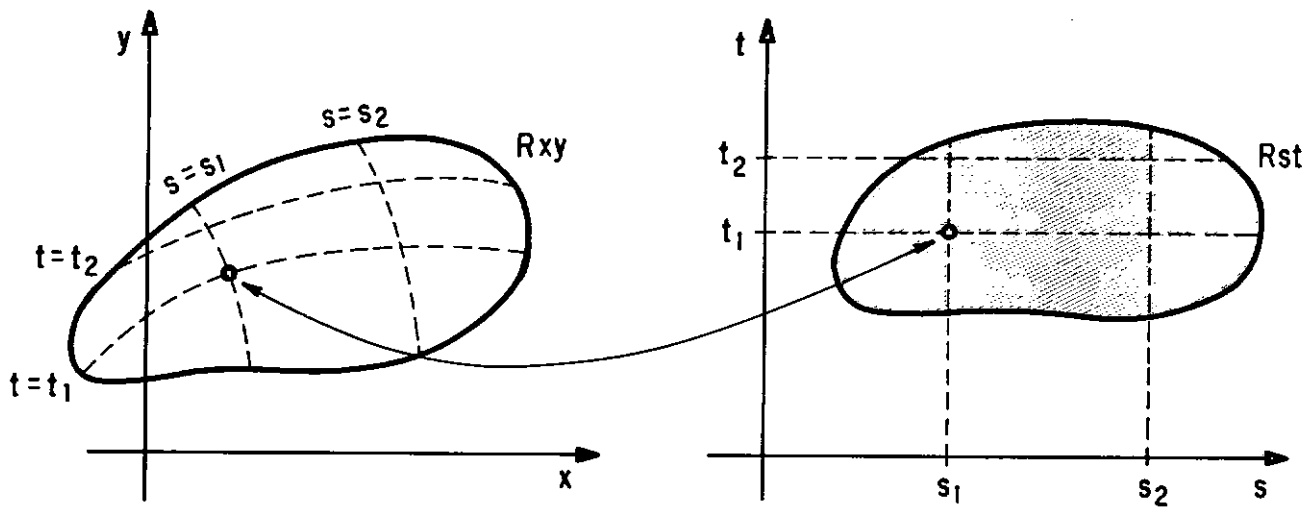


Figura IV.11 - Coordenadas curvilíneas para mudanças de variáveis.

Aqui, supõem-se as funções (IV.35) definidas numa região  $R_{st}$  do plano  $s, t$ , tendo derivadas contínuas nessa região. Os pontos  $x, y$  correspondentes pertencem à região  $R_{xy}$  do plano  $x, y$ , e admite-se que as funções inversas (IV.36) sejam definidas e contínuas em  $R_{xy}$ , de sorte que a correspondência entre  $R_{xy}$  e  $R_{st}$  é bijetora como sugere a Figura IV.11.

Supõe-se que a função  $u(x, y)$  seja contínua em  $R_{xy}$ , de modo que  $u \left[ x(s, t), y(s, t) \right]$  é contínua em  $R_{st}$ . Finalmente, admite-se que o Jacobiano  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ , a ser utilizado na transformação de coordenadas, seja ou sempre positivo em  $R_{st}$  ou sempre negativo em  $R_{st}$ .

Pode-se considerar que as equações (IV.35) introduzem coordenadas curvilíneas no plano  $x, y$ , como está sugerido na Figura IV.11. As retas  $s = \text{constante}$  e  $t = \text{constante}$  formam em  $R_{xy}$  um sistema de curvas, sendo natural empregá-las para dividir-se esta região em elementos curvilíneos.

#### IV.8.2 - Funções de Forma Para o Elemento Flexível

Considere-se a região bi-dimensional formada por nove pontos nodais, como se mostra na Figura IV.12. Um sistema de coordenadas locais  $s, t$  é definido. A malha é formada por linhas coordenadas  $s = \pm 1$  e  $t = \pm 1$ .

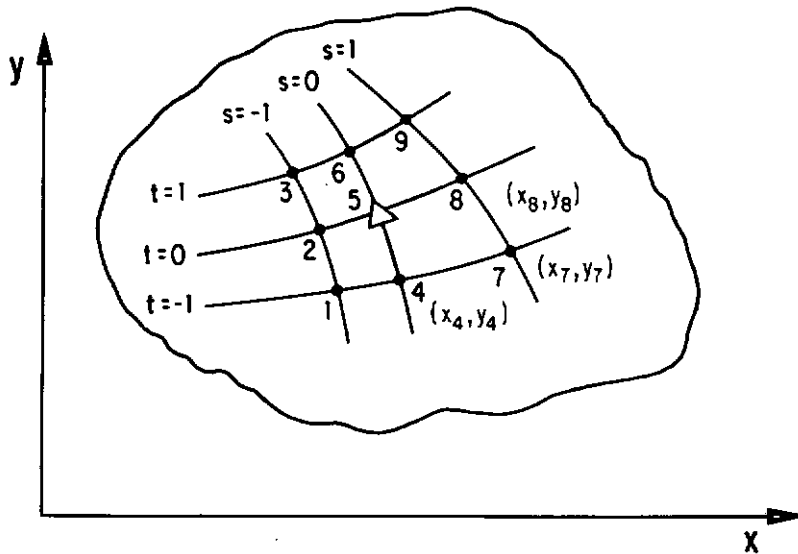


Fig. IV.12 - Coordenadas nodais locais e globais e discretização. ( $\Delta$ ): nó de referência, ( $\bullet$ ): nós adjacentes,  $(x_i, y_i)$ : coordenadas globais,  $(s_i, t_i)$ : coordenadas locais.

Admite-se ser possível definir uma função  $u$ , nesta região, por interpolação polinomial em termos de coordenadas  $s, t$ , como:

$$u = (a_1 + a_2s + a_3s^2) + t (a_4 + a_5s + a_6s^2) + t^2 (a_7 + a_8s + a_9s^2) , \quad (\text{IV.37})$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_9$  são coeficientes constantes.

A equação (IV.37) pode ser escrita na forma

$$u = \begin{bmatrix} \bar{s} & t\bar{s} & t^2\bar{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_9 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

onde

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros  $(a_1, a_2, \dots, a_9)$  na equação (IV.37) são as coordenadas generalizadas. Tais coeficientes são determinados utilizando-se valores da função nos nove pontos nodais (Figura IV.12), no sistema local  $s, t$ . É assim obtida a seguinte relação matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & t_1 s_1 & t_1^2 s_1 \\ s_2 & t_2 s_2 & t_2^2 s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_9 & t_9 s_9 & t_9^2 s_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_9 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

ou na forma compacta

$$\tilde{u}_p = \tilde{A} \tilde{a}_p \quad (\text{IV.40})$$

onde

$$\tilde{u}_p = \begin{bmatrix} u_1, u_2, \dots, u_9 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{a}_p = \begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_9 \end{bmatrix}^T$$

$\tilde{A}$ : matriz de coeficientes.

Verifica-se na equação (IV.40) que coordenadas generalizadas  $\underline{a}_p$  são associadas a valores da função nos nove pontos nodais através da matriz de transformação  $\underline{A}$ . É, então, possível obter-se a relação inversa

$$\underline{a}_p = \underline{A}^{-1} \underline{u}_p . \quad (\text{IV.41})$$

Introduzindo-se na equação (IV.38) o valor de  $\underline{a}_p$  fornecido em (IV.41), obtém-se

$$\underline{u} = \underline{P} \underline{A}^{-1} \underline{u}_p , \quad (\text{IV.42})$$

sendo

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \bar{s} & t\bar{s} & t^2\bar{s} \end{bmatrix} . \quad (\text{IV.43})$$

Em consequência, as funções de forma em coordenadas  $s, t$  para o elemento, sendo

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}_p = \begin{bmatrix} N_1, N_2, \dots, N_9 \end{bmatrix} \underline{u}_p , \quad (\text{IV.44})$$

são expressas como

$$\underline{N} = \underline{P} \underline{A}^{-1} . \quad (\text{IV.45})$$

A equação (IV.44) permite expressar-se o valor de uma função em um ponto da região da Figura IV.12, em termos de valores da função nos nove pontos nodais.



É de se notar que a formulação apresentada para obtenção da matriz  $\tilde{N}$  é consideravelmente simples. Entretanto, tal desenvolvimento é bastante laborioso em termos práticos dada a necessidade de inverter-se a matriz  $\tilde{A}$ . Segundo ERGATOUDIS [26], é possível obterem-se expressões explícitas para as funções de forma  $N_i(s,t)$ , evitando-se assim a construção da matriz  $\tilde{A}^{-1}$ .

Verifica-se, através de (IV.37), que a função  $u(s,t)$  é gerada pelo produto de duas bases uni-dimensionais, uma para cada coordenada de direção. Em virtude da dificuldade mencionada anteriormente, adotar-se-á uma base bi-dimensional diferente. Observa-se, através da equação (IV.40), a principal propriedade da função de interpolação: se a expressão é válida para todas as componentes de  $\tilde{u}_p$ ,  $N_k$  é igual a 1 no ponto nodal  $k$ , e igual a zero nos demais nós. De acordo com LAPIDUS e PINDER [34], um modo simples e sistemático de gerarem-se funções de forma de qualquer ordem é conseguido através do simples produto de polinômios apropriados em duas coordenadas.

#### IV.8.3 - Modelo Isoparamétrico

Sabe-se que no método dos elementos finitos é necessário definir-se a variação das componentes de deslocamento em termos de valores discretos destas funções. São então normalmente utilizadas funções de forma adequadas em coordenadas locais. A maior parte dos conceitos envolvidos no procedimento aqui descrito foram anteriormente introduzidos de maneira apropriada às situações particulares focalizadas. Todavia, estes serão em parte repetidos neste item com o propósito de continuidade e compreensão. Segue-se o desenvolvimento de funções de forma que bem pos

sam definir o modelo flexível. Estas serão apresentadas em uma linha análoga àquela abordada por ZIENKIEWICZ [45] no método dos elementos finitos. Considere-se o modelo retangular de placa com  $(I \times J)$  nós, representado na Figura IV.13. Os índices  $i$  e  $j$  ( $i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$ ) são coordenadas nodais, e  $s$  e  $t$  são coordenadas cartesianas no plano do elemento definido de tal modo que  $i = s$  e  $j = t$  em cada nó. Seja  $u(s,t)$  uma função cujas derivadas em um nó particularizado  $(\ell, m)$  são termos  $u_{ij}$  de valores da função  $u$  nos pontos nodais do modelo.

Objetiva-se a determinação de uma função de forma para o nó de referência  $(\ell, m)$  indicado na Figura IV.13. Escolhe-se um polinômio de ordem  $I$  em  $s$ , e que tenha um valor unitário nos pontos onde  $i = \ell$  e zero nos outros pontos nodais. Da mesma forma, adota-se um polinômio de ordem  $J$  em  $t$ , com um valor unitário nos pontos em que se tem  $j = m$  e zero nos demais. Polinômios com as propriedades mencionadas são conhecidos como polinômios de Lagrange, e o produto formado por estes fornece um valor unitário no ponto nodal particularizado [46]. Obtém-se, assim, uma função de forma utilizando-se o produto de duas bases Lagrangianas [34].

Polinômios de Lagrange podem ser expressos na forma

$$\psi_k^n(s) = \frac{(s - s_0)(s - s_1) \dots (s - s_{k-1})(s - s_{k+1}) \dots (s - s_n)}{(s_k - s_0)(s_k - s_1) \dots (s_k - s_{k-1})(s_k - s_{k+1}) \dots (s_k - s_n)}, \quad (\text{IV.46})$$

com um valor unitário em  $s_k$  e passando por  $n$  pontos. Desta forma, obtém-se para duas dimensões

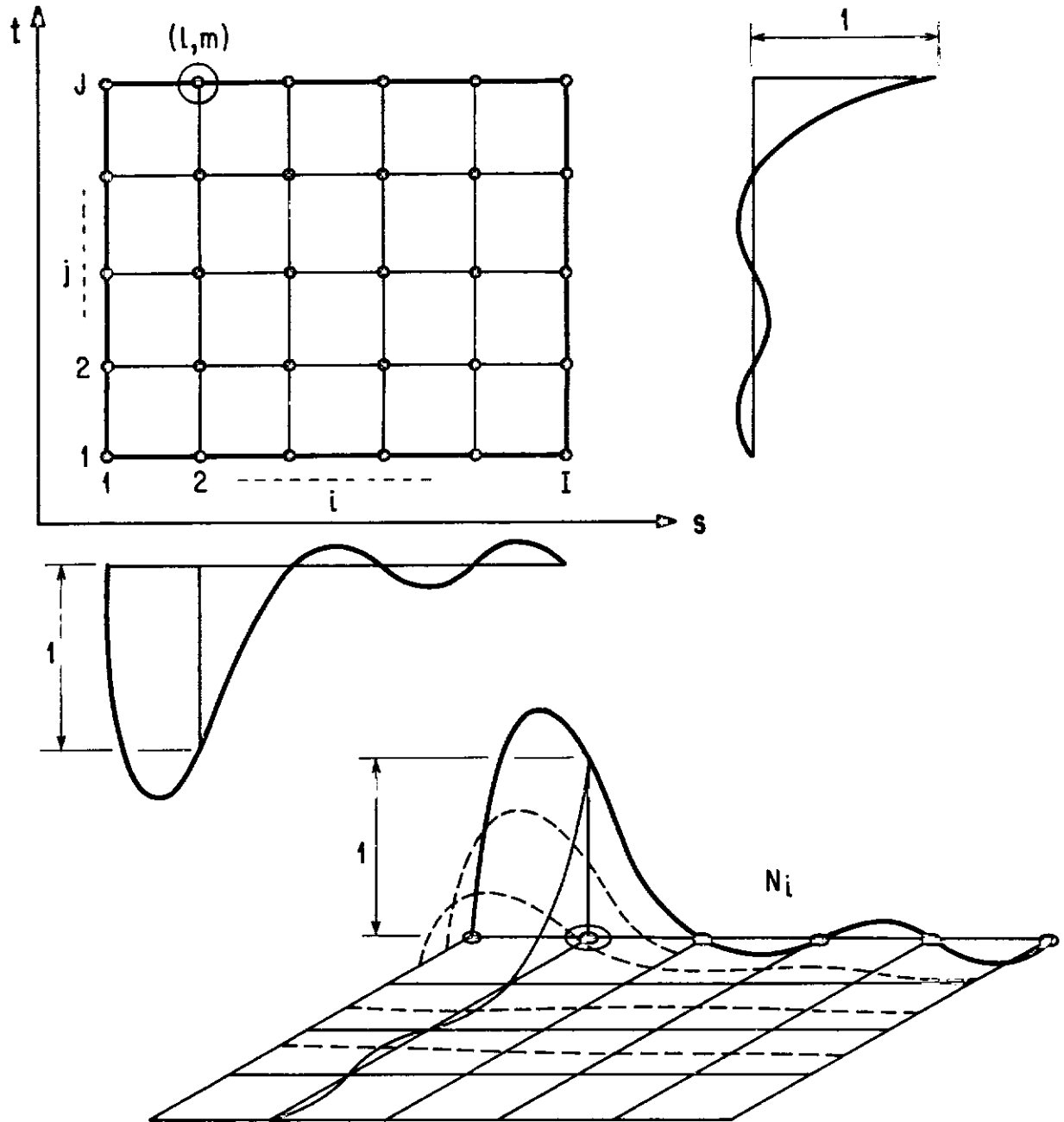


Fig. IV.13 - Modelo retangular genérico.

$$N_k = N_{\ell m} = \psi_{\ell}^I(s) \Psi_m^J(t) , \quad (\text{IV.47})$$

onde I e J indicam o número de nós em cada direção, e  $\ell$  e  $m$  as coordenadas nodais do ponto em consideração.

É conveniente representar-se  $u(s,t)$  na forma de produção de tensores

$$u(s,t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J u_{ij} \psi_i^I(s) \Psi_j^J(t) , \quad (\text{IV.48})$$

onde I e J indicam o número de subdivisões em cada direção da malha, e  $\psi$  e  $\Psi$  são funções de forma para interpolação polinomial de Lagrange.

$$\psi_i^I(s) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq i}}^I \left( \frac{s - s_v}{s_i - s_v} \right) , \quad i = 1, \dots, I . \quad (\text{IV.49})$$

$$\Psi_j^J(t) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^J \left( \frac{t - t_v}{t_j - t_v} \right) , \quad j = 1, \dots, J . \quad (\text{IV.50})$$

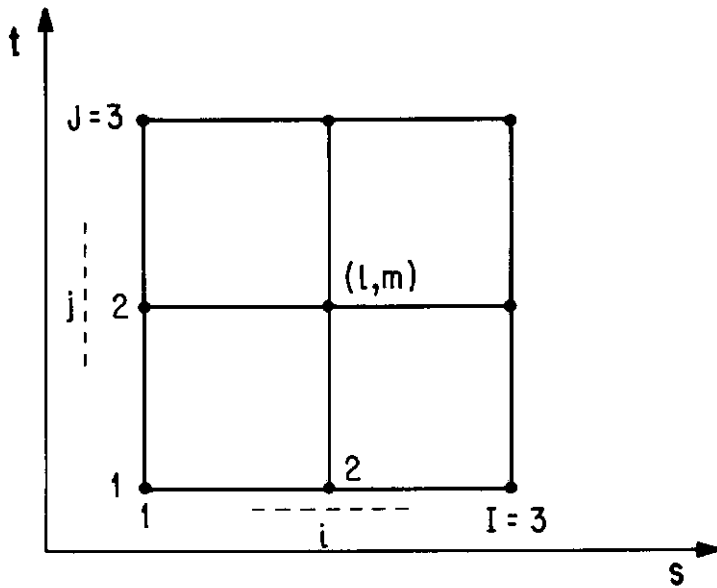


Fig. IV.14 - Modelo isoparamétrico de nove nós.

O caso particular (Figura IV.14) em que se tem  $I = J = 3$  coincide com o modelo de nove nós proposto anteriormente. Tem-se especial interesse neste caso, uma vez que suas relações incluem as diferenças finitas centrais para malhas quadradas (tais diferenças, como já mencionado, conduzem a uma melhor aproximação de resultados, sendo aqui obtidas quando se tem o nó central ( $l = 2, m = 2$ ) como ponto de referência).

Levando-se na equação (IV.48) os valores  $I = J = 3$ , obtêm-se

$$u(s,t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{ij} \psi_i(s) \psi_j(t) , \quad (\text{IV.51})$$

onde

$$\psi_i(s) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq i}}^3 \left( \frac{s - s_v}{s_i - s_v} \right) \quad (\text{IV.52})$$

$$\Psi_j(t) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^3 \left( \frac{t - t_v}{t_i - t_v} \right) . \quad (\text{IV.53})$$

Comparando-se a equação (IV.51) com a expressão (IV.44), qual seja,

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}_p = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_9 \end{bmatrix} \underline{u}_p ,$$

vê-se que a primeira pode ser reescrita como

$$u(s,t) = \underline{N} \underline{u}_p \quad (\text{IV.54})$$

sendo

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_{11} N_{12} N_{13} & N_{21} N_{22} N_{23} & N_{31} N_{32} N_{33} \end{bmatrix} ,$$

$$N_{ij} = \psi_i(s) \Psi_j(t) , \quad e$$

$$\tilde{u}_p = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} \cdot$$

Derivadas da função no ponto nodal de referência  $(\ell, m)$  são obtidas diretamente através da diferenciação da expressão (IV.51), e referindo-se estes resultados ao nó  $(\ell = 2, m = 2)$ .

Assim:

$$\left( u_s \right)_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{ij} \dot{q}_{i\ell} q_{jm}$$

$$\left( u_{ss} \right)_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{ij} \ddot{q}_{i\ell} q_{jm}$$

(IV.55)

$$\left( u_t \right)_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{ij} q_{i\ell} \dot{q}_{jm}$$

$$\left( u_{tt} \right)_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{ij} q_{i\ell} \ddot{q}_{jm}$$

onde  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$  são arranjos definidos por

$$q_{i\ell} \equiv \psi_i(s_\ell) = \psi_i(t_\ell) , \quad i, \ell = 1, 2, 3$$

$$\dot{q}_{i\ell} \equiv \dot{\psi}_i(s_\ell) = \dot{\psi}_i(t_\ell) , \quad i, \ell = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.56})$$

$$\ddot{q}_{i\ell} \equiv \ddot{\psi}_i(s_\ell) = \ddot{\psi}_i(t_\ell) , \quad i, \ell = 1, 2, 3 .$$

As relações (IV.56) são apresentadas na Tabela IV.1 e utilizadas na geração de fórmulas de diferenças finitas.

Tab.IV.1 -  $q_{i\ell}$ ,  $\dot{q}_{i\ell}$  e  $\ddot{q}_{i\ell}$  para  $i, \ell = 1, 2, 3$

$q_{i\ell}$	$\dot{q}_{i\ell}$	$\ddot{q}_{i\ell}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$



Seguem-se funções de forma (Figura IV.15) e suas derivadas primeiras e segundas, para o elemento bi-dimensional de nove nós representado na Figura IV.14.

$$\begin{aligned}\psi_1(s) &= \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} \frac{s - s_3}{s_1 - s_3} \\ \psi_2(s) &= \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \frac{s - s_3}{s_2 - s_3}\end{aligned}\quad (\text{IV.57})$$

$$\begin{aligned}\psi_3(s) &= \frac{s - s_1}{s_3 - s_1} \frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \\ \Psi_1(t) &= \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \frac{t - t_3}{t_1 - t_3} \\ \Psi_2(t) &= \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \frac{t - t_3}{t_2 - t_3}\end{aligned}\quad (\text{IV.58})$$

$$\Psi_3(t) = \frac{t - t_1}{t_3 - t_1} \frac{t - t_2}{t_3 - t_2}$$

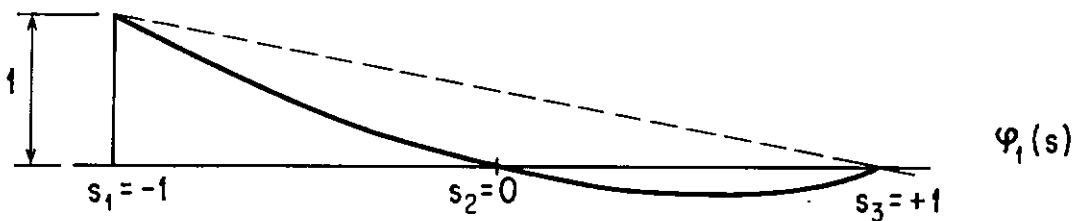


Figura IV.15 - Funções de forma para um elemento bi-dimensional de nove nós.

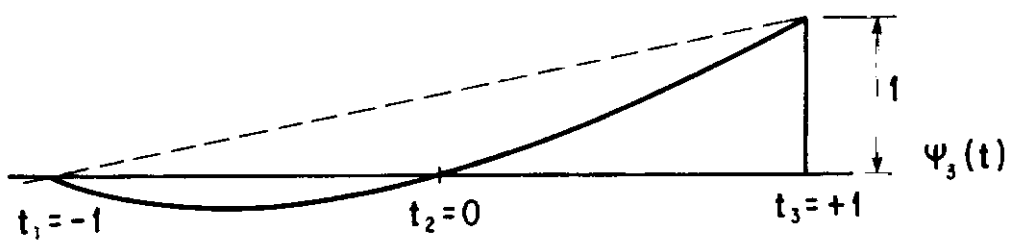
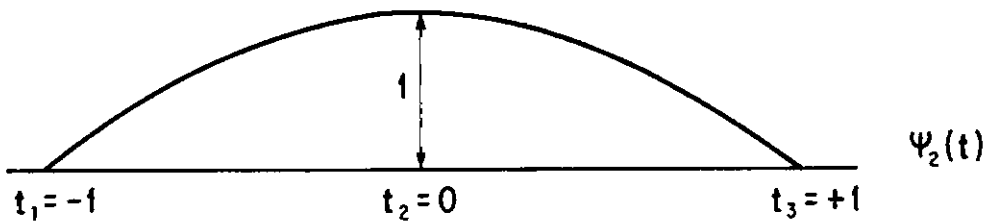
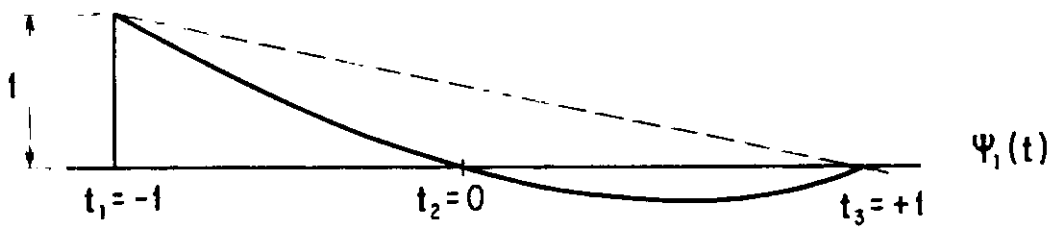
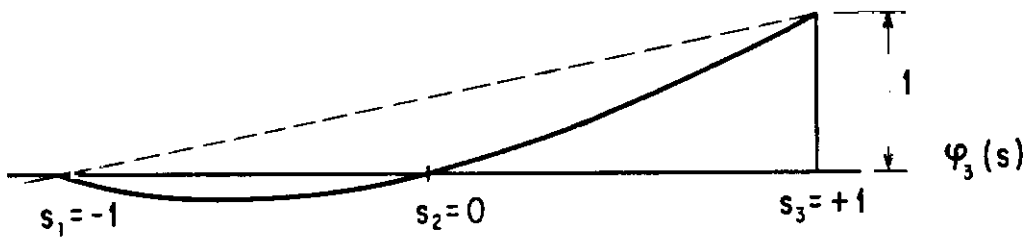
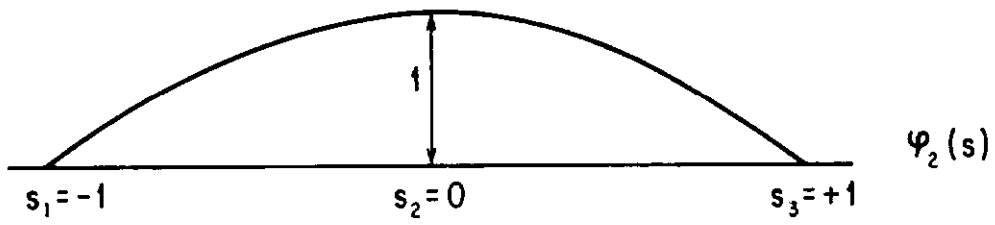


Figura IV.15 - (cont.)

$$\dot{\psi}_1(s) = \frac{2s - s_2 - s_3}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}$$

$$\dot{\psi}_2(s) = \frac{2s - s_1 - s_3}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} \quad (\text{IV.59})$$

$$\dot{\psi}_3(s) = \frac{2s - s_1 - s_2}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}$$

$$\dot{\psi}_1(t) = \frac{2t - t_2 - t_3}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{2t - t_1 - t_3}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \quad (\text{IV.60})$$

$$\dot{\psi}_3(t) = \frac{2t - t_1 - t_2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$\ddot{\psi}_1(s) = \frac{2}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}$$

$$\ddot{\psi}_2(s) = \frac{2}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} \quad (\text{IV.61})$$

$$\ddot{\psi}_3(s) = \frac{2}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}$$

$$\ddot{\Psi}_1(t) = \frac{2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}$$

$$\ddot{\Psi}_2(t) = \frac{2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \quad (\text{IV.62})$$

$$\ddot{\Psi}_3(t) = \frac{2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

Levando  $s = s_2$  e  $t = t_2$  nas expressões (IV.57) e (IV.62), são determinados os valores das funções de forma e suas derivadas para o nó de referência ( $\ell = m = 2$ ). Ressalte-se que estes valores são idênticos aos fornecidos pela Tabela IV.1.

Expressões das funções de coordenadas  $x$ ,  $y$  e de deslocamento transversal  $w$  no ponto considerado são obtidas através da simples substituição de  $u$  por  $x$ ,  $y$  e  $w$  na expressão (IV.51). Resultam:

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \psi_i(s) \Psi_j(t) \quad (\text{IV.63})$$

$$y(s, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} \psi_i(s) \Psi_j(t)$$

$$w(s,t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} \psi_i(s) \psi_j(t) \quad (\text{IV.64})$$

sendo  $\psi_i(s)$  e  $\psi_j(t)$  fornecidas em (IV.52) e (IV.53), respectivamente.

As expressões (IV.63) e (IV.64) podem ainda ser reescritas através de (IV.54), como

$$x(s,t) = \sum_p^N x_p \quad (\text{IV.65})$$

$$y(s,t) = \sum_p^N y_p$$

$$w(s,t) = \sum_p^N w_p \quad (\text{IV.66})$$

sendo  $x_p$ ,  $y_p$  e  $w_p$  valores representativos das respectivas funções nos nove pontos nodais do modelo.

É de se notar que o procedimento adotado, em que se procura representar a geometria do elemento pelas mesmas funções de interpolação utilizadas quando da representação do campo de deslocamentos, é idêntico ao conceito de isoparametria introduzido por ERGATOUDIS na formulação do método dos elementos finitos. IRONS [47] define a forma geral de tais elementos como um quadrilátero isoparamétrico. As expressões de funções de forma apresentadas são próprias da representação de elementos finitos Lagrangianos. FREY concebe o modelo que aqui se apresenta como um elemento capaz de se deformar em um isoparamétrico curvo (Figura IV.16). O modelo flexível proposto para a discretização de placas é, desta forma, tratado como o elemento finito isoparamétrico de nove nós (Figura IV.17), apresentado em [45, 48].

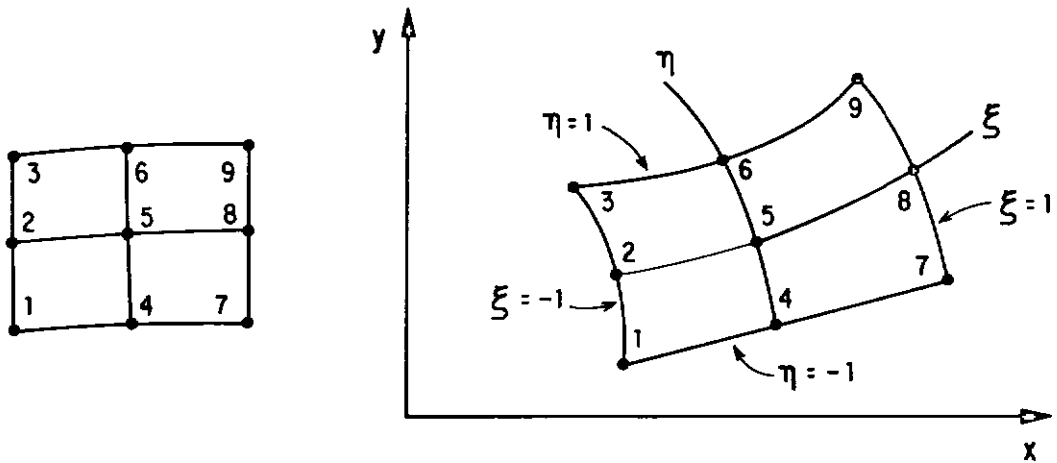


Fig. IV.16 - Modelo quadrilátero primitivo e modelo isoparamétrico.

#### IV.8.4 - Transformação de Derivadas Parciais para o Sistema de Coordenadas Curvilíneas

Poder-se-ão expressar as derivadas de uma função  $u$  em um elemento da região  $R_{xy}$  ( $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ ), em termos de quantidades presumivelmente calculáveis em  $R_{st}$  ( $u_s, u_t, u_{ss}, u_{tt}, u_{st}; x_s, \dots, x_{st}; y_s, \dots, y_{st}$ ).

Cabe ressaltar que o processo de transformação destas derivadas envolve unicamente operações de diferenciação direta e algébricas.

As derivadas de  $u(x,y)$  são obtidas mediante utilização da regra de cadeia, o que acarreta:

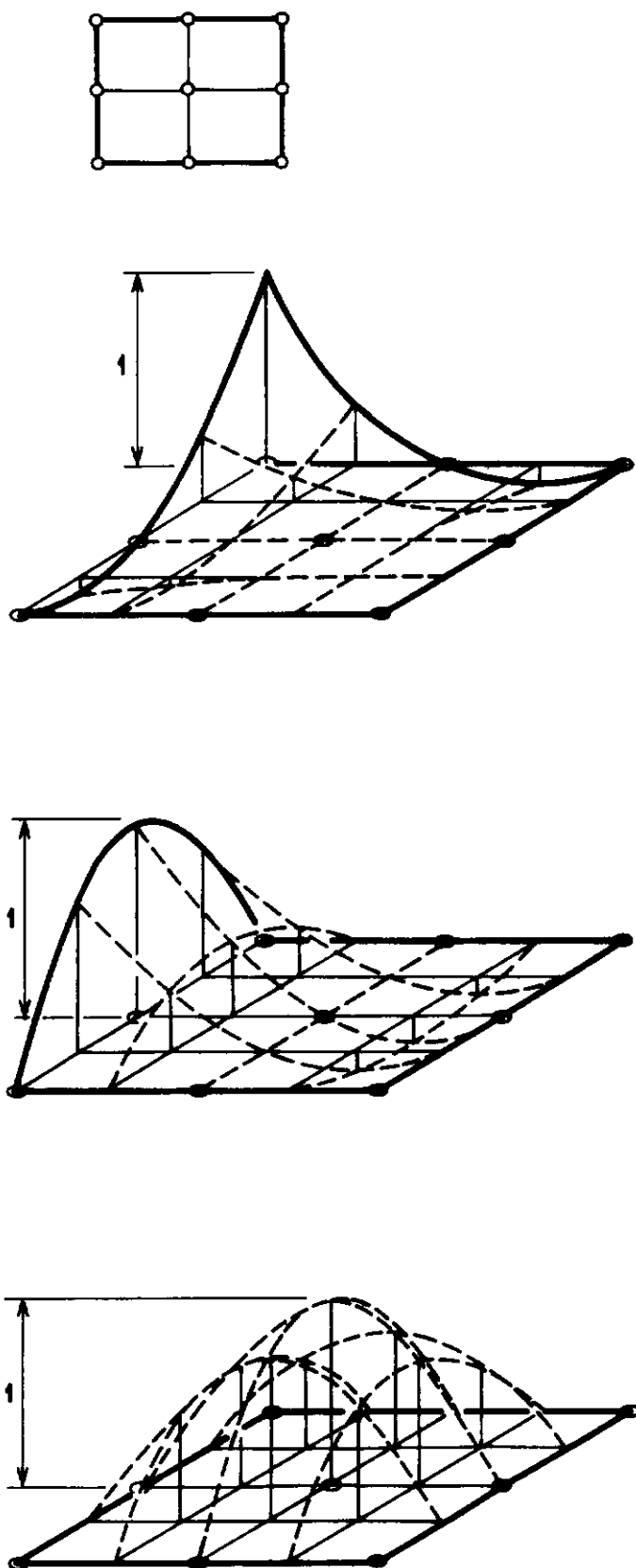


Fig. IV.17 - Funções de forma para um elemento quadrático da família de Lagrange.

$$u_x = u_s s_x + u_t t_x \quad u_y = u_s s_y + u_t t_y \quad (\text{IV.67})$$

$$u_{xx} = s_x^2 u_{ss} + 2s_x t_x u_{st} + t_x^2 u_{tt} + s_{xx} u_s + t_{xx} u_t \quad (\text{IV.68})$$

$$u_{yy} = s_y^2 u_{ss} + 2s_y t_y u_{st} + t_y^2 u_{tt} + s_{yy} u_s + t_{yy} u_t \quad (\text{IV.69})$$

$$u_{xy} = s_x s_y u_{ss} + (s_x t_y + t_x s_y) u_{st} + t_x t_y u_{tt} + s_{xy} u_s + t_{xy} u_t \quad (\text{IV.70})$$

As expressões de derivadas parciais locais de primeira ordem são fornecidas pela inversão do determinante Jacobiano  $J$  que, juntamente com suas derivadas em relação a  $s, t$ , são as quantidades básicas na transformação de coordenadas.

Define-se  $J$  como

$$J = \begin{bmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.71})$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{bmatrix} = J^{-1}. \quad (\text{IV.72})$$



O inverso do Jacobiano é normalmente obtido sem maiores problemas, desde que exista uma correspondência biunívoca entre coordenadas locais e globais.

O determinante de  $J$  é obtido na forma

$$J^* = \det \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = x_s y_t - x_t y_s . \quad (\text{IV.73})$$

Diferenciando-se  $J^*$  em relação a  $s, t$ , obtém-se

$$J_s^* = x_{ss} y_t + x_s y_{st} - x_{st} y_s - x_t y_{ss} \quad (\text{IV.74})$$

$$J_t^* = x_{st} y_t + x_s y_{tt} - x_{tt} y_s - x_t y_{st} .$$

As derivadas de  $s(x, y)$  e  $t(x, y)$  são escritas em termos de quantidades calculáveis na forma

$$s_x = \frac{y_t}{J^*} \quad s_y = \frac{-x_t}{J^*} \quad t_x = \frac{-y_s}{J^*} \quad t_y = \frac{x_s}{J^*} \quad (\text{IV.75})$$

e

$$s_{xx} = \frac{1}{J^*} \left( s_x y_{st} + t_x y_{tt} \right) - \frac{y_t}{J^{*2}} \left( s_x J_s + t_x J_t \right) \quad (\text{IV.76})$$

$$s_{xy} = \frac{1}{J^*} \left( s_y y_{st} + t_y y_{tt} \right) - \frac{y_t}{J^{*2}} \left( s_y J_s + t_y J_t \right) \quad (\text{IV.77})$$

$$s_{YY} = -\frac{1}{J^*} \left\{ s_Y^{x_{st}} + t_Y^{x_{tt}} \right\} + \frac{x_t}{J^{*2}} \left\{ s_Y^{J_s} + t_Y^{J_t} \right\} \quad (\text{IV.78})$$

$$t_{xx} = -\frac{1}{J^*} \left\{ s_x^{y_{ss}} + t_x^{y_{st}} \right\} + \frac{y_s}{J^{*2}} \left\{ s_x^{J_s} + t_x^{J_t} \right\} \quad (\text{IV.79})$$

$$t_{xy} = -\frac{1}{J^*} \left\{ s_y^{y_{ss}} + t_y^{y_{st}} \right\} + \frac{y_s}{J^{*2}} \left\{ s_y^{J_s} + t_y^{J_t} \right\} \quad (\text{IV.80})$$

$$t_{YY} = -\frac{1}{J^*} \left\{ s_y^{x_{ss}} + t_y^{x_{st}} \right\} - \frac{x_s}{J^{*2}} \left\{ s_y^{J_s} + t_y^{J_t} \right\} \quad (\text{IV.81})$$

Considere-se a forma de produto de tensores utilizada para definir-se uma transformação da malha retangular no plano local  $s, t$  para uma malha curvilínea no plano físico, dada pelas expressões (IV.63),

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \psi_i(s) \varphi_j(t)$$

$$y(s, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} \psi_i(s) \varphi_j(t) \quad .$$

Verifica-se que derivadas primeiras e segundas de  $x, y$  em relação a  $s, t$  são obtidas das expressões (IV.63) através da diferenciação de suas funções de forma. As expressões para tais derivadas, referidas ao nó  $(l, m)$  indicado na Figura IV.14, po-

dem ser desenvolvidas diretamente, substituindo-se nas equações (IV.55) a função  $u$  por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Resultam as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{matrix} x_s \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \dot{q}_{i\ell} q_{jm} + O(h^2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_{ss} \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \ddot{q}_{i\ell} q_{jm} + O(h^2)$$

(IV.82)

$$\left\{ \begin{matrix} x_t \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} q_{i\ell} \dot{q}_{jm} + O(h^2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_{tt} \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} q_{i\ell} \ddot{q}_{jm} + O(h^2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} y_s \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} \dot{q}_{i\ell} q_{jm} + O(h^2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} y_{ss} \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} \ddot{q}_{i\ell} q_{jm} + O(h^2)$$

(IV.83)

$$\left\{ \begin{matrix} y_t \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} q_{i\ell} \dot{q}_{jm} + O(h^2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} y_{tt} \\ \end{matrix} \right\}_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ij} q_{i\ell} \ddot{q}_{jm} + O(h^2)$$

Os arranjos  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$  nas expressões (IV.82) e (IV.83) são definidos em (IV.56), e apresentados na Tabela (IV.1).

Conhecidos os valores das derivadas  $x(s,t)$ ,  $y(s,t)$  e  $u(s,t)$  na região local, prossegue-se a determinação das derivadas parciais no domínio físico. Aplicando-se as fórmulas (IV.67) a (IV.70), determinam-se:

$$\begin{aligned} \left\{ u_x \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_x \right\}_{ij\ell m} u_{ij} + O(\gamma_h h^2) \\ \left\{ u_{xx} \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_{xx} \right\}_{ij\ell m} u_{ij} + O(\gamma_h h^2) \\ \left\{ u_y \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_y \right\}_{ij\ell m} u_{ij} + O(\gamma_h h^2) \\ \left\{ u_{yy} \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_{yy} \right\}_{ij\ell m} u_{ij} + O(\gamma_h h^2) \\ \left\{ u_{xy} \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_{xy} \right\}_{ij\ell m} u_{ij} + O(\gamma_h h^2) \end{aligned} \quad (IV.84)$$

sendo os coeficientes

$$\begin{aligned}
 \left( b_x \right)_{ijlm} &= s_x \dot{q}_{il} q_{jm} + t_x q_{il} \dot{q}_{jm} \\
 \left( b_y \right)_{ijlm} &= s_y \dot{q}_{il} q_{jm} + t_y q_{il} \dot{q}_{jm} \\
 \left( b_{xx} \right)_{ijlm} &= s_x^2 \ddot{q}_{il} q_{jm} + 2s_x t_x \dot{q}_{il} \dot{q}_{jm} + t_x^2 q_{il} \ddot{q}_{jm} + \\
 &\quad + s_{xx} \dot{q}_{il} q_{jm} + t_{xx} q_{il} \dot{q}_{jm} \\
 \left( b_{yy} \right)_{ijlm} &= s_y^2 \ddot{q}_{il} q_{jm} + 2s_y t_y \dot{q}_{il} \dot{q}_{jm} + t_y^2 q_{il} \ddot{q}_{jm} + \\
 &\quad + s_{yy} \dot{q}_{il} q_{jm} + t_{yy} q_{il} \dot{q}_{jm} \\
 \left( b_{xy} \right)_{ijlm} &= s_x s_y \ddot{q}_{il} q_{jm} + \left( s_x t_y + t_x s_y \right) \dot{q}_{il} q_{jm} + t_x t_y q_{il} \ddot{q}_{jm} + \\
 &\quad + s_{xy} q_{il} \ddot{q}_{jm} + t_{xy} q_{il} \dot{q}_{jm} .
 \end{aligned}
 \tag{IV.85}$$

As derivadas de  $s(x,y)$  e  $t(x,y)$  contidas nestas expressões são fornecidas em (IV.75) a (IV.81), mediante substituição das derivadas de  $x(s,t)$  e  $y(s,t)$  obtidas em (IV.82) e (IV.83).

GORDON e HALL [49] estimam o erro de discretização de corrente da utilização do elemento isoparamétrico de Lagrange. De acordo com estes pesquisadores tal erro, associado a uma função, é da ordem  $O(\gamma_h h^2)$ , ( $h = \max h_j \rightarrow 0$ ). O termo  $\gamma_h$  reflete a influência da distorção e  $j$  designa cada quadrilátero curvilí-

neo. Uma vez que se utilizam esquemas de diferenças finitas centrais para obterem-se as derivadas das funções de interpolação polinomial de Lagrange, não se altera, quando da diferenciação, a ordem de erro acima referida.

#### IV.8.5 - Determinação das Deformações Generalizadas do Elemento

É necessário estabelecerem-se expressões de derivadas segundas de  $w(x,y)$ , uma vez que estas são fundamentais na determinação das deformações generalizadas da placa, fornecidas por (II.3):

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{bmatrix}$$

Derivadas segundas parciais de  $w(x,y)$  referidas ao nó  $(\ell,m)$  da Figura IV.14 são obtidas substituindo-se  $u$  por  $w$  nas expressões (IV.84), como segue:

$$\begin{aligned} \left\{ w_{xx} \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_{xx} \right\}_{ij\ell m} w_{ij} + O(h^2) \\ \left\{ w_{yy} \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_{yy} \right\}_{ij\ell m} w_{ij} + O(h^2) \\ \left\{ w_{xy} \right\}_{\ell,m} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ b_{xy} \right\}_{ij\ell m} w_{ij} + O(h^2) \end{aligned} \quad (IV.86)$$

com o comprimento  $h$  do intervalo de malha aqui relacionado ao elemento distor

cido e sendo os coeficientes  $(b_{xx})_{ijlm}$ ,  $(b_{yy})_{ijlm}$  e  $(b_{xy})_{ijlm}$  fornecidos pelas expressões (IV.85).

Pode-se então escrever, de acordo com (II.3) e (IV.71),

$$\begin{bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (b_{xx})_{11} & (b_{xx})_{12} & (b_{xx})_{13} & (b_{xx})_{21} & (b_{xx})_{22} & (b_{xx})_{23} & (b_{xx})_{31} & (b_{xx})_{32} & (b_{xx})_{33} \\ (b_{yy})_{11} & (b_{yy})_{12} & (b_{yy})_{13} & (b_{yy})_{21} & (b_{yy})_{22} & (b_{yy})_{23} & (b_{yy})_{31} & (b_{yy})_{32} & (b_{yy})_{33} \\ (b'_{xy})_{11} & (b'_{xy})_{12} & (b'_{xy})_{13} & (b'_{xy})_{21} & (b'_{xy})_{22} & (b'_{xy})_{23} & (b'_{xy})_{31} & (b'_{xy})_{32} & (b'_{xy})_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \\ w_{31} \\ w_{32} \\ w_{33} \end{matrix} \\
 + O(h^2)$$



sendo  $(b'_{xy})_{ij} = 2(b_{xy})_{ij}$ .

A expressão (IV.87) pode ser expressa na forma compacta

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta}}^e + O(h^2) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \\ w_{31} \\ w_{32} \\ w_{33} \end{bmatrix} + O(h^2). \quad (\text{IV.88})$$

Considere-se a seguinte expressão dada em (IV.66):

$$\underline{\underline{w}}(s, t) = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{w}}_p,$$

$$\text{sendo } \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

e  $\underline{\underline{w}}_p$  o vetor dos deslocamentos transversais associados aos nove pontos do modelo.

As expressões de deformação generalizada - deslocamento podem ser reescritas através de (IV.66), como

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\delta}}^e + O(h^2), \quad (\text{IV.89})$$

sendo  $\underline{L}$  um operador diferencial, expresso em diferenças finitas.

Comparando-se (IV.89) com (IV.88), identifica-se imediatamente a matriz  $\underline{B}$  referida ao ponto  $(\ell, m)$ . Segue-se que

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} , \quad (\text{IV.90})$$

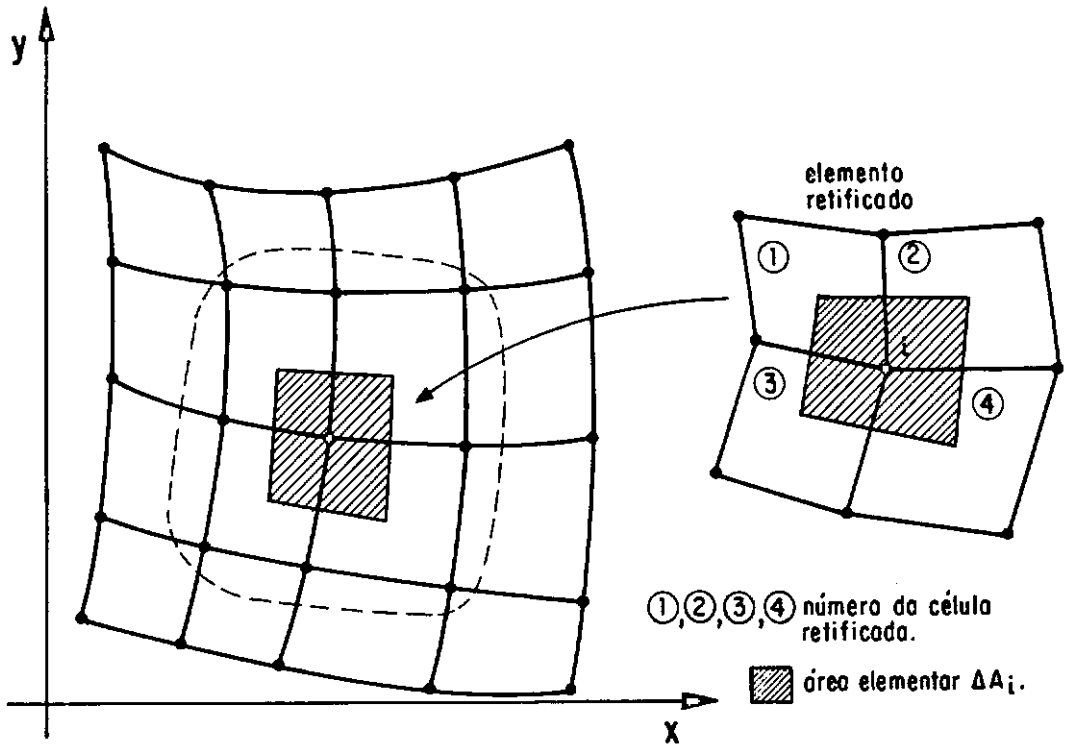
com

$$B_{ij} = \underline{L} N_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_{ij}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_{ij}}{\partial y^2} \\ -\frac{2\partial^2 N_{ij}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} . \quad (\text{IV.91})$$

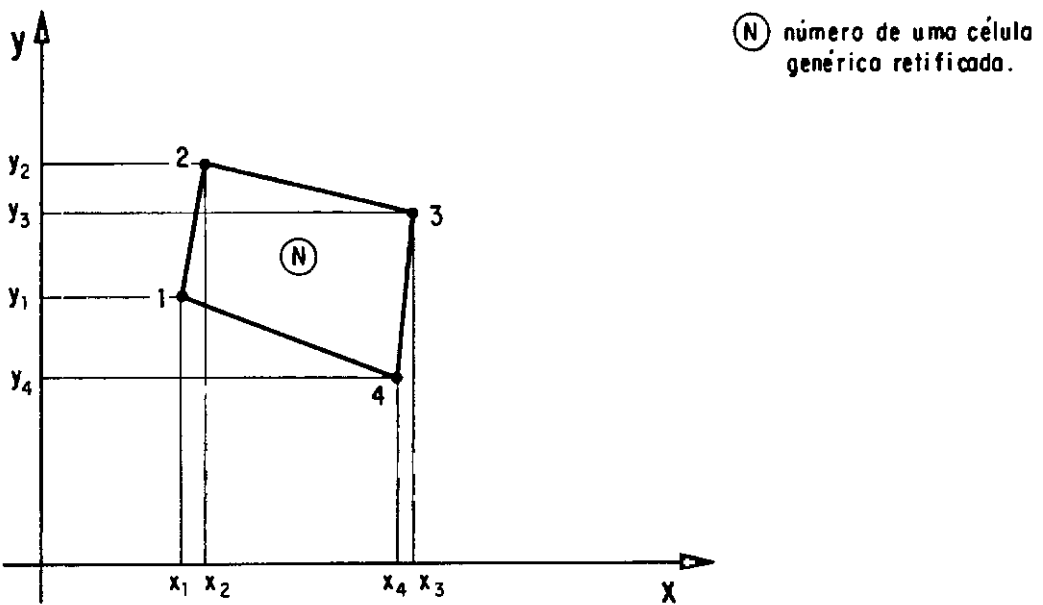
São desta forma calculadas as deformações generalizadas de um elemento de uma malha curvilínea, uma vez conhecidos os deslocamentos transversais associados aos pontos nodais.

#### IV.8.6 - Determinação da Área do Elemento Flexível

A Figura IV.18a mostra uma malha curvilínea representada no sistema global de coordenadas  $x, y$ , utilizada na discretização de placas. Pretende-se determinar a área  $\Delta A_i$  de um elemen



(a) Malha curvilínea no sistema de coordenadas  $x, y$ .



(b) Célula  $N$  retificada no sistema de coordenadas  $x, y$ .

to de nó central  $i$ , pertencente à malha, também representado na referida figura. A área do elemento flexível é determinada de modo aproximado no próprio sistema global de coordenadas, retificando-se o seu contorno, para efeito de simplificações. Obtém-se esta área a partir das contribuições daquelas quatro associadas às células que constituem o elemento. A área de uma célula  $N$  (Figura IV.18b), simbolizada por  $(\Delta A_c)_N$ , é avaliada de forma aproximada no sistema global. Utiliza-se, para isto, o método dos trapézios para aproximação de integrais.

O valor aproximado da integral ao longo do intervalo  $(x_1, x_4)$  definido na Figura IV.18b será a soma de todos os subintervalos. A integral de cada subintervalo  $(x_k - x_{k-1})$  é aproximada pela área de um trapézio.

O valor da área da célula  $N$  é, portanto

$$(\Delta A_c)_N = \sum_{k=1}^4 (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{(y_k + y_{k-1})}{2} \quad (\text{IV.92})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\Delta A_c)_N = & (x_2 - x_1) \frac{(y_2 + y_1)}{2} + (x_3 - x_2) \frac{(y_3 + y_2)}{2} + \\ & + (x_4 - x_3) \frac{(y_4 + y_3)}{2} + (x_1 - x_4) \frac{(y_1 + y_4)}{2} . \end{aligned} \quad (\text{IV.93})$$

Somando-se um quarto da área de cada uma das quatro células que constituem o elemento, fica então determinada a área elementar  $\Delta A$

$$\Delta A = \left[ (\Delta A_C)_1 + (\Delta A_C)_2 + (\Delta A_C)_3 + (\Delta A_C)_4 \right] / 4 . \quad (\text{IV.94})$$

#### IV.8.7 - Equações de Equilíbrio

Feita a definição da malha que discretiza a placa, pode-se expressar, para os elementos, a energia potencial total em função dos deslocamentos nodais.

No integrando da equação (IV.1) as derivadas são substituídas por expressões de diferenças finitas, permitindo assim que a energia de deformação por unidade de área se expresse em termos de deslocamentos dos pontos nodais do elemento (Figura IV.18a) como

$$U_i = F (w_1, w_2, \dots, w_9) . \quad (\text{IV.95})$$

A função  $F$  representada acima se estende sobre toda a área elementar  $\Delta A_i$  situada em torno do ponto nodal  $i$  e representada esquematicamente na Figura IV.18a.

Integrando-se a expressão (IV.95) sobre a área elementar, determina-se

$$\bar{U}_i = F (w_1, w_2, \dots, w_9) . \quad (\text{IV.96})$$

O termo de carga  $\bar{V}_i$  é expresso por

$$\bar{V}_i = - p_i w_i \Delta A_i \quad , \quad (\text{IV.97})$$

sendo  $p_i$  a carga transversal (média) distribuída sobre o elemento em questão.

Somando-se tais expressões para toda a região da placa, obtém-se

$$\Pi = \sum_{i=1}^I (\bar{U}_i + \bar{V}_i) \quad . \quad (\text{IV.98})$$

As expressões (IV.6), (IV.11) e (IV.88) permitem que a energia potencial total do elemento, em função dos deslocamentos nodais, seja escrita como:

$$\Pi^e = \Pi_O^e (\delta_O^e) + O(h^2) \quad (\text{IV.99})$$

ou ainda,

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \left[ \int_A \tilde{\delta}^e{}^T \underline{B}^T \underline{D} \tilde{\delta}^e dA - \tilde{\delta}^e{}^T \underline{Q}^e + O(h^2) \right] \quad (\text{IV.100})$$

onde  $\underline{Q}^e$  representa o vetor das forças nodais do elemento,

$$\underline{\delta}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.101})$$

sendo  $q = p_i A$ , com  $A$  passando a designar a área do elemento.

Procede-se à eliminação dos deslocamentos prescritos da expressão (IV.100), conforme expôs-se em item anterior, através de relações algébricas da forma

$$\underline{\delta}_b^e = \underline{G} \underline{\delta}_a^e + \underline{r} + O(h^2), \quad (\text{IV.102})$$

onde  $\underline{\delta}_a^e$  e  $\underline{\delta}_b^e$  são formas particionadas do vetor de deslocamentos  $\underline{\delta}^e$ , dado por

$$\underline{\delta}^e = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_a^e \\ \hline \underline{\delta}_b^e \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.103})$$

Segue-se a expressão resultante:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_A \delta_{\underline{a}}^e \hat{\underline{B}}^T \underline{D} \hat{\underline{B}} \delta_{\underline{a}}^e dA - \delta_{\underline{a}}^e \hat{\underline{Q}}_e + o(h^2) , \quad (\text{IV.104})$$

onde

$$\hat{\underline{B}} = \underline{B}_a + \underline{B}_b \underline{G}$$

$$\hat{\underline{Q}} = \underline{Q}_a^e + \underline{Q}_b^e \underline{G}$$

e  $\underline{B}_a$ ,  $\underline{B}_b$ ,  $\underline{Q}_a^e$  e  $\underline{Q}_b^e$  são formas particionadas de  $\underline{B}$  e  $\underline{Q}$  respectivamente, como se mostra para  $\underline{B}$

$$\underline{B} = \left[ \begin{array}{c|c} \underline{B}_a & \underline{B}_b \end{array} \right] .$$

As equações de equilíbrio são obtidas da condição

$$\delta \Pi_O^e = 0 , \quad (\text{IV.105})$$

donde

$$\int_A \hat{\underline{B}}^T \underline{D} \hat{\underline{B}} \delta_{\underline{a}}^e dA - \hat{\underline{Q}}_e^e = 0 . \quad (\text{IV.106})$$

De forma mais condensada,



$$\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{\delta}}_a^e - \underline{\underline{\hat{Q}}}^e = 0 , \quad (\text{IV.107})$$

sendo

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_A \underline{\underline{\hat{B}}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\hat{B}}} dA . \quad (\text{IV.108})$$

Constata-se que as equações obtidas utilizando-se o método energético de diferenças finitas são as mesmas equações de equilíbrio geradas com o método dos elementos finitos com base na formulação de deslocamentos. Portanto,  $\underline{\underline{K}}^e$  pode ser definida como a matriz de rigidez do elemento.

A matriz de rigidez global e o vetor de carga global são obtidos pelas contribuições de cada elemento, conforme o processo usual.

$$\underline{\underline{K}} = \sum \underline{\underline{K}}^e \quad (\text{IV.109})$$

$$\underline{\underline{Q}} = \sum \underline{\underline{Q}}^e .$$

As equações globais de equilíbrio obtidas através da minimização do funcional de energia são escritas na seguinte forma:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{Q}} , \quad (\text{IV.110})$$

onde  $\underline{\underline{\delta}}$  representa o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura.

Os deslocamentos nodais da malha são então determinados na forma

$$\underline{\delta} = \underline{K}^{-1} \underline{Q} , \quad (\text{IV.111})$$

permitindo-se conhecer para cada elemento os respectivos vetores de deslocamentos nodais.

#### IV.8.8 - Esforços Solicitantes no Elemento

Os esforços solicitantes (momentos fletores e torsores) por unidade de comprimento são avaliados nos elementos, através da expressão (II.10), como

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = - \frac{E h^3}{12 (1 - \nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - w_{xx} \\ - w_{yy} \\ - 2 w_{xy} \end{bmatrix}$$

ou na forma

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} . \quad (\text{II.11})$$

Substituindo-se a expressão (IV.88) em (II.11), obtém-se

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{\delta}^e . \quad (\text{IV.112})$$

## CAPÍTULO V

### PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA

#### V.1 - Introdução

Neste Capítulo são consideradas algumas etapas envolvidas no desenvolvimento do programa elaborado com base nos fundamentos teóricos apresentados em capítulos anteriores. A implementação computacional aqui descrita é utilizada na análise linear de placas e foi desenvolvida em linguagem FORTRAN no computador Burroughs 6800, com 6 Mbytes de memória principal, do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ. Procurou-se otimizar o programa, viabilizando a sua aplicação em microcomputadores; para isto lançou-se mão de técnicas adequadas e eficientes de economia de memória e tempo de execução. Em particular, foram aproveitadas algumas idéias inerentes à estrutura do programa STAP (Static Analysis Program) para análises pelo método dos elementos finitos. O programa STAP foi implantado no computador IBM/370 e desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachussetts pelo Prof. Klaus-Jürgen Bathe [48]

#### V.2 - Programação Automática

É necessária a especificação das propriedades dos materiais que constituem a placa a ser analisada. Considera-se neste trabalho que a placa seja constituída por um só tipo de material isótropo linear, sendo fornecidas as especificações relativas ao módulo de Young  $E$ , e ao coeficiente de Poisson  $\nu$  característicos deste.

O programa gera uma malha curvilínea a partir de um esquema retangular através da determinação automática das coordenadas dos pontos nodais e da conexão destes para a formação de elementos. Adota-se o método da interpolação linear para obterem-se as coordenadas dos pontos nodais. Este esquema simples consiste em fornecerem-se pontos extremos de uma linha e gerarem-se os nós interiores, sendo desta forma desnecessária a especificação de cada nó. Portanto, a interpolação linear envolve somente o fornecimento das coordenadas nodais e das coordenadas cartesianas de pontos extremos. A diferença entre as coordenadas nodais destes pontos determina o número de divisões da linha. A diferença entre as coordenadas cartesianas fornece o comprimento da linha que, dividido por aquele número, determina incrementos iguais de linha reta. Estes incrementos,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , são adicionados às coordenadas cartesianas de pontos de coordenadas nodais de menores valores, para obter-se o ponto intermediário mais próximo. Prossegue-se desta forma, até alcançar-se o último ponto nodal da linha. Após a determinação de todos os pontos nodais da malha, inicia-se o processo de geração de elementos, a partir do ponto com coordenadas nodais de menores valores no contorno da estrutura. Este ponto de coordenadas  $(i,j) = (2,2)$  será considerado como nó central do elemento de numeração 1, e a partir destas coordenadas é gerada a numeração que designa este nó e os outros oito que constituem o elemento. Os pontos nodais designados por  $(i-1, j-1)$  nó 1,  $(i-1, j)$  nó 2,  $(i-1, j+1)$  nó 3,  $(i, j-1)$  nó 4,  $(i,j)$  nó 5,  $(i, j+1)$  nó 6,  $(i+1, j-1)$  nó 7,  $(i+1, j)$  nó 8,  $(i+1, j+1)$  nó 9, formam a incidência de cada elemento. Prossegue-se a numeração dos pontos nodais e dos elementos, fixando-se o valor de  $i$  e incrementando-se o de  $j$  até que o último atinja o

seu maior valor na malha sobre a estrutura. Uma vez alcançado o máximo valor de  $j$  para o correspondente  $i$ , o nó central do próximo elemento é identificado acrescentando-se 1 a  $i$ . Então  $j$  é novamente incrementado a partir de seu valor mínimo. Este procedimento é repetido até serem atingidos os máximos valores das coordenadas  $i$  e  $j$  da malha que discretiza o domínio (fechado) da estrutura, quando então são gerados todos os elementos.

Também são geradas e armazenadas as áreas dos elementos que constituem a malha gerada automaticamente.

O processo de especificação das condições de contorno está relacionado com o método adotado para armazenarem-se matrizes globais, como a de rigidez. Utiliza-se a técnica de eliminação de linhas e colunas do sistema de equações algébricas correspondentes aos deslocamentos nodais restringidos. As restrições nodais da placa são geradas a partir de informações relativas às condições de bordo, utilizando-se os códigos 1 (um) e 0 (zero), representando, respectivamente, direção vinculada e direção livre. Estes códigos de vinculação são armazenados no vetor ID, de dimensão igual ao número total de nós da malha. Desta forma, o elemento (I) no vetor ID corresponde ao grau de liberdade do ponto nodal I. Os graus de liberdade ativos são definidos por  $ID(I) = 1$ . Uma vez definidos por zeros os deslocamentos transversais no vetor ID, pode ser determinada a numeração das equações correspondentes a estes graus de liberdade. O procedimento consiste em substituir-se cada zero contido no vetor ID por um número de equação, que cresce em módulo sucessivamente de 1 até o número total de equações. Ao mesmo tempo, os outros graus de liberdade assu-

mem o valor zero. Verifica-se que o procedimento exposto implica não só no fornecimento de informações acerca das restrições de contorno, como também apresenta uma forma de se montarem equações compactas.

Também com o auxílio do vetor ID, procura-se suprimir os deslocamentos transversais incógnitos associados aos pontos fictícios externos aos bordos apoiados ou engastados. As equações correspondentes a estas incógnitas nodais a serem eliminadas são referidas, no vetor ID, por um número de mesmo valor em módulo que os utilizados para as equações associadas a pontos internos de posições simétricas aos fictícios considerados. Porém, os números que identificam estas equações relacionadas aos pontos externos são acrescidos de sinal - ou +, caso se trate de um bordo simplesmente apoiado ou engastado, respectivamente. A eliminação das incógnitas associadas a estes pontos externos é permitida considerando-se alterações nas matrizes de rigidez dos elementos que os englobam. Desta forma, torna-se necessária a construção de um vetor LA para cada elemento, relacionando os deslocamentos dos nós que o constituem aos respectivos números que o representam no vetor ID. Nas matrizes de rigidez dos elementos, colunas associadas aos deslocamentos de pontos fictícios são somadas ou subtraídas àquelas relativas aos correspondentes pontos internos, conforme sejam positivos ou negativos, respectivamente, os números representativos dos pontos externos no vetor LA. O mesmo procedimento é adotado em relação às linhas, procurando-se deste modo manter a simetria destas matrizes.

As matrizes de rigidez dos elementos são armazenadas em um arranjo unidimensional G, pelo método da altura efetiva de

coluna, com o auxílio de um vetor apontador que indica a posição, no vetor  $G$ , de um elemento da diagonal principal. Sendo assim, cada matriz de rigidez de elemento  $\underline{SK}$  pode ser armazenada em forma compacta, com ordem igual ao número de graus de liberdade. Isto é conseguido com a criação de um vetor  $LM$  para cada elemento, relacionando as incógnitas de graus de liberdade considerados aos correspondentes números de equações. Importante é ressaltar que o vetor  $LM$  difere do vetor  $LA$  mencionado anteriormente, por apresentar, referidas por zero, não só as incógnitas de deslocamentos restringidos, como também as próprias de pontos fictícios que podem ser ignoradas. Verifica-se que o vetor  $LM$  é determinado pelos pontos nodais que constituem o elemento e pela numeração designada a estes pontos. Informações para a formação deste vetor são fornecidas pelo arranjo  $ID$ , numa etapa que precede a atribuição de números às incógnitas de deslocamentos de pontos externos a bordos apoiados ou engastados. Também através do vetor  $LM$  de cada elemento, são determinadas as alturas de colunas da matriz da estrutura. Objetivando-se aproveitar as características de simetria das matrizes de rigidez dos elementos gerados pelo método energético de diferenças finitas, somente são armazenados os coeficientes pertencentes à parte triangular superior. Sendo estabelecidas as alturas de colunas da matriz, os coeficientes considerados das matrizes  $\underline{SK}$  são então armazenados no vetor  $G$ . Constrói-se também o vetor  $MAXA$  que armazena os endereços dos elementos da diagonal no vetor  $G$ .

As forças nodais externas associadas aos graus de liberdade ativos devem ser fornecidas. Em problemas que apresentam o carregamento uniformemente distribuído, o mesmo deve ser

convertido em forças nodais. Para este caso particular, o vetor das forças nodais é gerado automaticamente.

Para a resolução do sistema de equações algébricas lineares, utiliza-se o método de Gauss.

Um vetor comum A é particionado para o armazenamento dos arranjos de dados e globais tais como de rigidez, carga, etc. Cada vetor tem seu dimensionamento ajustado ao tamanho exigido para cada problema, através da utilização de um conjunto de indicadores no programa principal. Desta maneira, evita-se o desperdício de espaço de memória destinado ao armazenamento de dados, sendo uma quantidade máxima de espaço reservada ao armazenamento de vetores globais. Utilizando-se alocação dinâmica de memória, torna-se possível o reaproveitamento de seus espaços nas diversas etapas do programa. Além disso, o programa testa os espaços de memória destinados a cada etapa de análise, imprimindo uma mensagem de erro, caso estes sejam insuficientes. A capacidade total de memória do programa é controlada pela dimensão do vetor principal, sendo definida no programa principal.

O programa elaborado permite inclusive a consideração de bordos com diversas condições de contorno e casos de ortotropia física. É também capaz de gerar malhas com espaçamentos irregulares e admite a análise de associações de placas.

São apresentados, no Apêndice, os fluxogramas relativos ao programa.



O programa é modulado em subrotinas que são caracterizadas a seguir:

a) INPUT

Subrotina que realiza a leitura das características elásticas do material da placa. Gera dados relativos aos pontos nodais, e chama a subrotina responsável pela geração dos elementos da malha. Calcula o número de equações do sistema e numera os deslocamentos transversais livres, montando assim o arranjo ID.

b) ELEMENT

Subrotina que gera a incidência e área dos elementos; monta o vetor LM relativo a cada um destes, armazenando-os no arquivo IELMNT. Chama a subrotina que calcula a altura efetiva da coluna associada a cada elemento.

c) COLHT

Subrotina que calcula as alturas efetivas de coluna.

d) LOADS

Subrotina que lê, gera e imprime dados de carregamento (cargas nodais), monta o vetor de carga para cada caso e o armazena no arquivo ILOAD.

## e) ADDRES

Subrotina responsável pela montagem do vetor apontador MAXA, após serem percorridos todos os elementos. Este vetor fornece a posição dos elementos da matriz de rigidez, armazenada pela técnica do perfil [48].

## f) CLEAR

Subrotina que limpa um espaço de memória destinado ao armazenamento da matriz de rigidez da estrutura.

## g) ASSEM

Subrotina que realiza a leitura do arquivo IELMNT e chama as outras responsáveis pela montagem das matrizes de rigidez do elemento e da estrutura.

## h) RIGID

Subrotina que monta a matriz elástica  $\underline{D}$  e calcula a matriz  $\underline{B}$  que relaciona as deformações aos deslocamentos, armazenando-a no arquivo IARQ. Realiza ainda a montagem da matriz de rigidez do elemento.

## i) REDUCT

Subrotina responsável pela eliminação de deslocamentos associados aos nós fictícios através da adição ou subtração de linhas e colunas da matriz de rigidez do elemento.

## j) ADDBAN

Subrotina responsável pelo armazenamento da parte triangular superior da matriz de rigidez do elemento em forma unidimensional, na matriz de rigidez global da estrutura.

## l) COLSOL

Subrotina que resolve o sistema de equações de equilíbrio pelo método de Gauss, utilizando altura efetiva de coluna.

## m) LOADV

Subrotina que lê o arquivo ILOAD para obtenção do vetor de cargas.

## n) WRITE

Subrotina que imprime os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura.

## o) STRESS

Subrotina que calcula e imprime os esforços solicitantes no elemento. Nesta etapa o arquivo IARQ é lido para o cálculo dos resultados finais.

## CAPÍTULO VI

## RESULTADOS NUMÉRICOS

VI.1 - Introdução

O presente capítulo tem o propósito de apresentar a aplicação da formulação descrita anteriormente a problemas de interesse teórico e prático, estimando-se sua credibilidade, versatilidade e eficiência. Procede-se à análise linear em coordenadas cartesianas de exemplos de placas isótropas com formas geométricas retilíneas variadas e espessuras constantes. Pesquisa-se através de tabelas e gráficos, a convergência dos resultados encontrados para deslocamentos transversais e momentos fletores, comparando-os com aqueles obtidos analiticamente ou por outro processo numérico. Com a finalidade de aproveitar-se a geração de malhas de discretização oferecida pelo programa computacional, abordaram-se somente os casos de placas com bordos retilíneos. Todavia, a formulação apresentada permite a consideração de placas com bordos curvos.

Uma vez que os resultados conseguidos nos casos estudados com o método apresentado se encontram em fase de comprovação, é objetivo primordial deste trabalho compará-los com soluções analíticas, sendo de interesse secundário a confrontação destes com outros provenientes de diferentes soluções numéricas. Dada a dificuldade de obtenção de soluções analíticas em diversos problemas de placas com geometrias irregulares, limitou-se a análise a exemplos considerados básicos e que bem caracterizem a aplicabilidade do método.

## VI.2 - Exemplos

### VI.2.1 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada Uniformemente

Analizou-se através do método energético de diferenças finitas (M.E.D.) com malhas arbitrárias uma placa quadrada, simplesmente apoiada nos bordos, solicitada por um carregamento distribuído  $q$ , utilizando-se diversas malhas.

Não obstante sua forma geométrica regular, este caso foi tratado como básico inicial, possibilitando-se a comparação de seus resultados com os da placa esconsa apresentada posteriormente.

As propriedades físicas e geométricas da placa analisada são as seguintes:

rigidez à flexão  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  (E: módulo de elasticidade; h: espessura da placa)

coeficiente de Poisson  $\nu$

comprimento do lado  $a$

Adotaram-se os valores 0,0 e 0,3 para coeficientes de Poisson  $\nu$ .

Em virtude da simetria é desnecessário discretizar-se a placa inteira, porém incluiu-se este procedimento tendo em vista

a comparação de seus resultados com os advindos das considerações de simetria.

São apresentados resultados relativos à discretização da metade ou de apenas um quadrante da placa original, conforme se utilizem um ou dois planos de simetria, respectivamente. As Figuras VI.1a e VI.1c mostram a consideração usual dos casos de simples e dupla simetria respectivamente, onde a placa é seccionada por planos. De outra maneira, recorre-se a estruturas substitutas da placa original, utilizando-se engastes deslocáveis ao longo de seus planos de simetria (Figuras VI.b e VI.d). Os processos de consideração de simetria aqui referidos foram descritos em capítulo anterior.

A flecha máxima e os momentos fletores no centro da placa são expressos respectivamente por

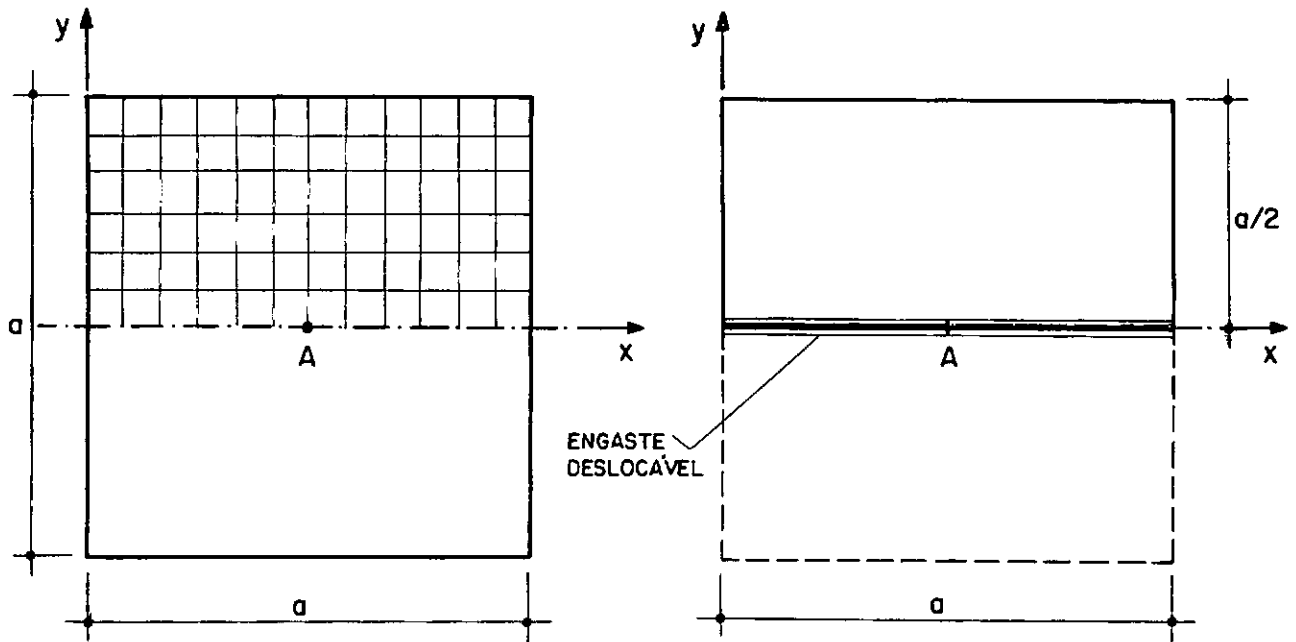
$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$$

$$M_x = M_y = \beta qa^2.$$

Os valores exatos das constantes multiplicadoras [33] e os obtidos aqui, bem como o número de graus de liberdade que caracteriza a malha adotada, apresentam-se em tabelas e gráficos descritos a seguir.

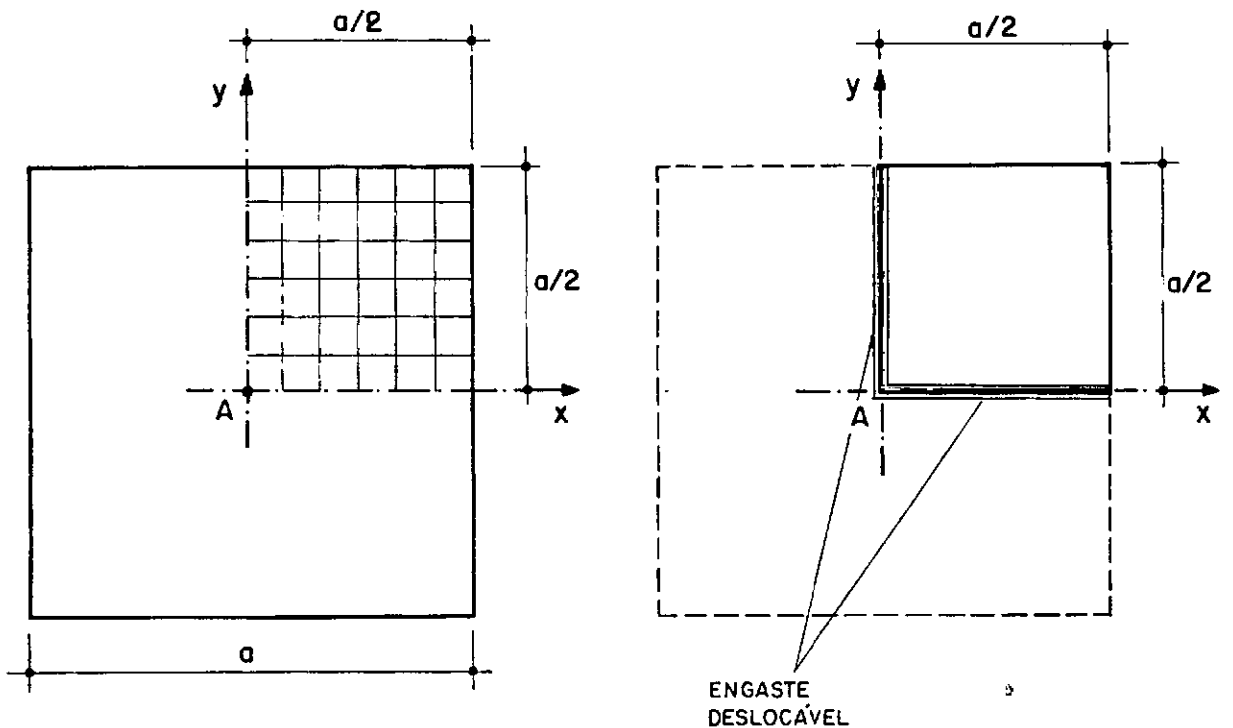
#### a) Tabelas:

Tabela VI.1 - fornece os valores das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  para a flecha máxima e para os momentos fletores máximos na placa (ponto central A).



(a) Simetria simples por seccionamento da placa.

(b) Simetria simples com utilização de engaste deslocável.



(c) Dupla simetria por seccionamento da placa.

(d) Dupla simetria com utilização de engastes deslocáveis.

Tabela VI.2 - fornece os valores da constante  $\alpha$  para a flecha máxima considerando-se metade da placa original (simetria simples).

Tabela VI.3 - fornece os valores da constante  $\alpha$  para a flecha máxima considerando-se um quadrante da placa original (dupla simetria).

b) Gráficos:

Gráfico VI.1 - representa os valores da constante  $\alpha$  no ponto central A da placa.

Gráfico VI.2 - representa os valores da constante  $\beta$  no ponto central A da placa.

Gráfico VI.3 - representa os valores da constante  $\alpha$  no ponto A para a metade da placa original.

Gráfico VI.4 - representa os valores da constante  $\alpha$  no ponto A para um quadrante da placa original.

#### VI.2.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada no Centro

Estudou-se o caso de uma placa quadrada simplesmente apoiada nos bordos, solicitada por uma carga concentrada no seu centro.

As características físicas e geométricas adotadas para esta estrutura são as mesmas apresentadas no item anterior.

Utilizando-se a solução em série de Navier [33] para a expressão do deslocamento transversal, verifica-se que suas de



Tab.VI.1 - Valores das constantes " $\alpha$ " e " $\beta$ " para deslocamento transversal e momentos fletores em uma placa quadrada simplesmente apoiada e carregada uniformemente

MALHA	NÚMERO DE G.D.L.	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w = \alpha \frac{qa^4}{D}$				MOMENTO FLETOR $M_x = M_y = \beta qa^2$			
		$\alpha$				$\beta$			
		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha$	% ERRO	$\alpha$	% ERRO	$\beta$	% ERRO	$\beta$	% ERRO
2 x 2	25	0,00625	53,9	0,00530	30,4	0,0500	35,5	0,0551	15,0
4 x 4	49	0,00465	14,4	0,00444	9,4	0,0403	4,0	0,0502	4,8
8 x 8	121	0,00421	3,6	0,00416	2,5	0,0377	2,3	0,0485	1,2
16 x 16	361	0,00410	0,9	0,00409	0,6	0,0371	0,5	0,0480	0,2
32 x 32	1225	0,00407	0,2	0,00407	0,1	0,0369	0,0	0,0479	0,0
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [33])		0,00406				0,0369		0,0479	

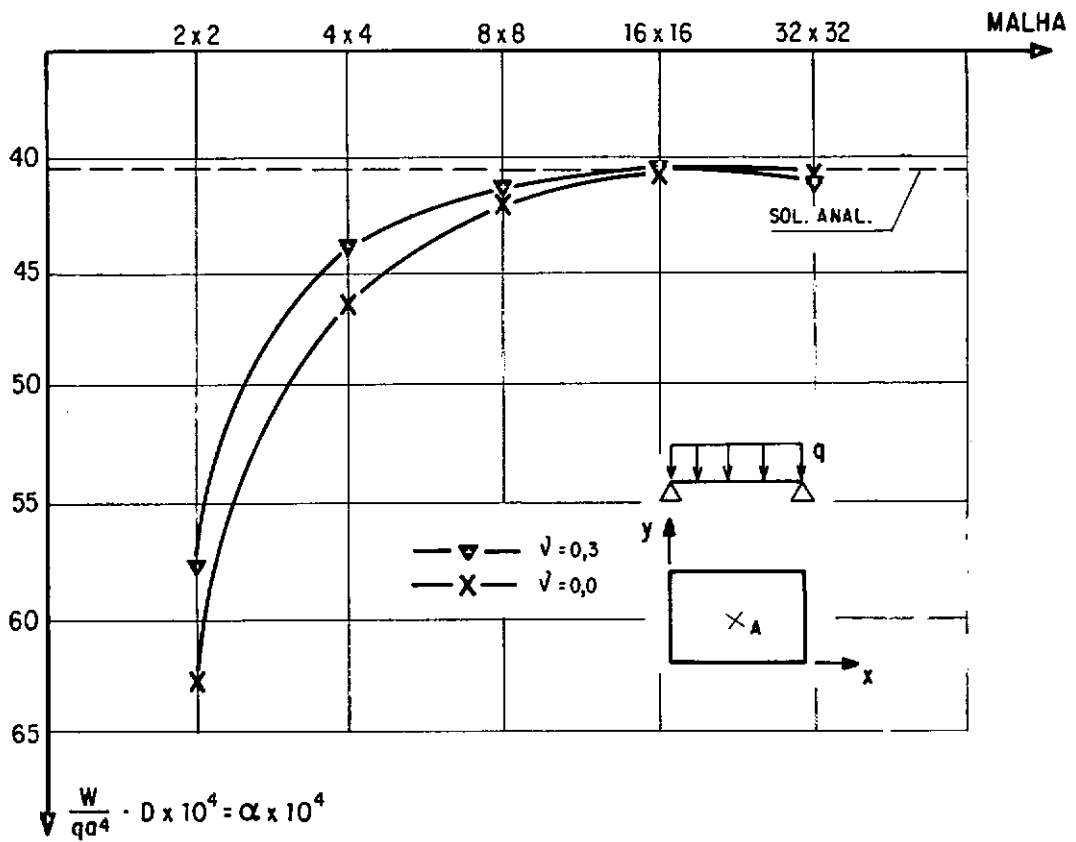


Gráfico VI. 1 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos bordos e uniformemente carregada.

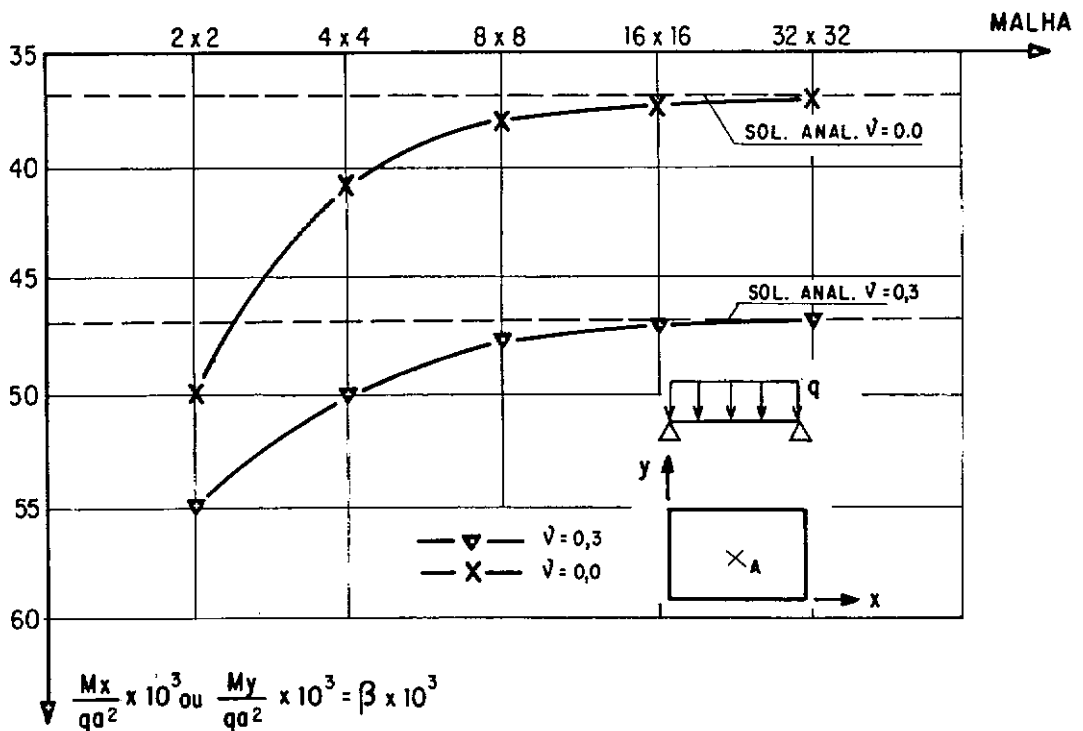


Gráfico VI. 2 - Momento fletor  $M_x = M_y$  no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos bordos e uniformemente carregada.

Tab.VI.2 - Valores da constante " $\alpha$ " para deslocamento  $w$  no centro de uma placa quadrada simplesmente apoiada e carregada uniformemente (simetria simples)

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w = \alpha \frac{qa^4}{D}$ (SIMETRIA SIMPLES)										
MALHA	COM UTILIZAÇÃO DE ENGASTE DESLOCÁVEL					COM SECCIONAMENTO DA PLACA				
	NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$		NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha$	% ERRO	$\alpha$	% ERRO		$\alpha$	% ERRO	$\alpha$	% ERRO
4 x 2	35	0,005130	26,3	0,004674	15,1	35	0,004649	14,5	0,004443	9,4
8 x 4	77	0,004496	10,7	0,004333	6,7	77	0,004210	3,7	0,004162	2,5
12 x 6	135	0,004334	6,7	0,004241	4,4	135	0,004128	1,7	0,004107	1,1
16 x 8	209	0,004260	4,9	0,004196	3,3	209	0,004099	1,0	0,004087	0,7
24 x 16	513	0,004161	2,5	0,004132	1,8	513	0,004075	0,4	0,004071	0,3
32 x 24	945	0,004128	1,7	0,004110	1,2	945	-	-	-	-
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [33])		0,004062				0,004062				

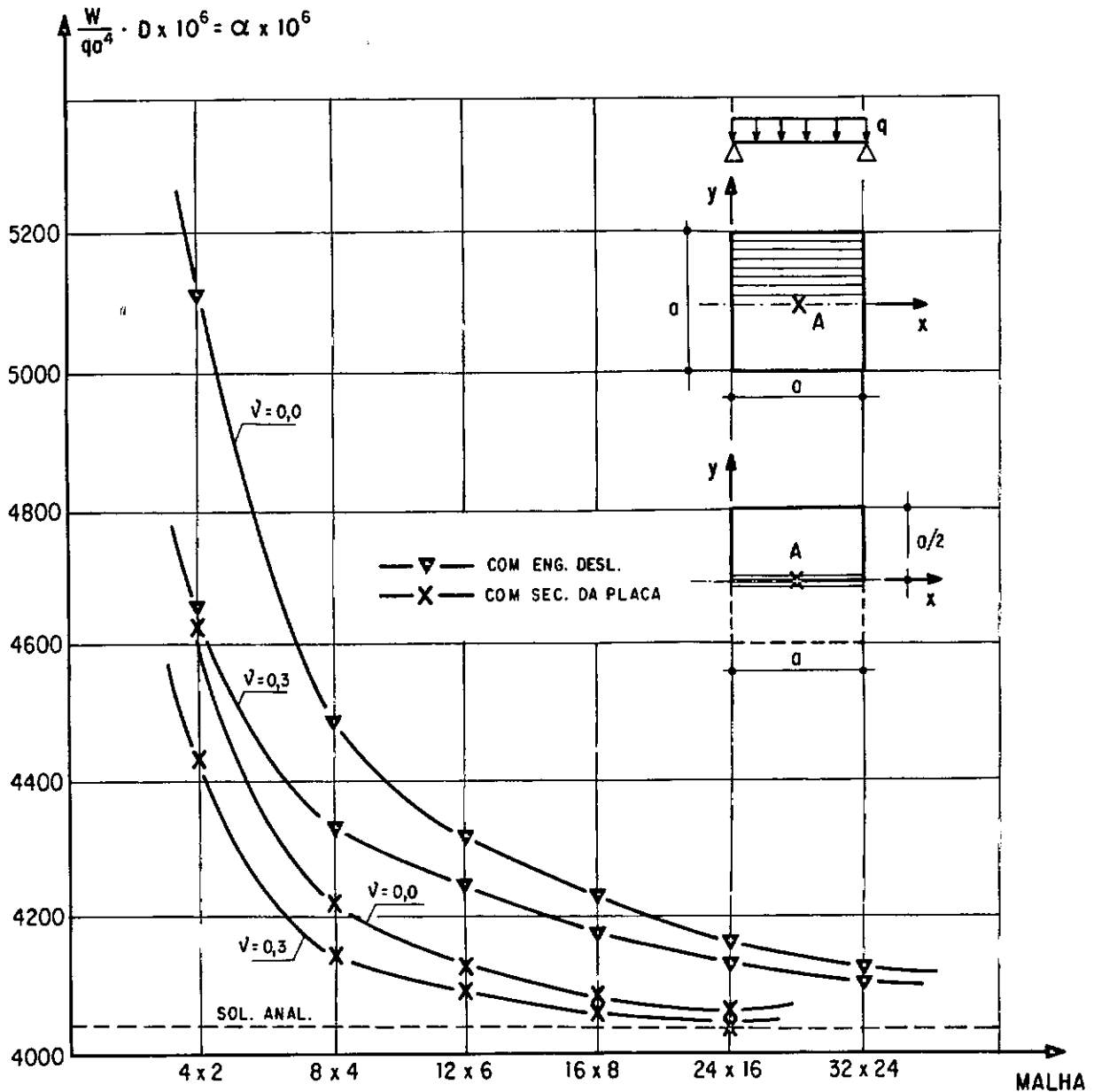


Gráfico VI. 3 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa quadrada simplesmente apoiada e carregada uniformemente (simetria simples).

Tab.VI.3 - Valores da constante " $\alpha$ " para deslocamento  $w$  no centro de uma placa quadrada simplesmente apoiada e carregada uniformemente (dupla simetria)

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w = \alpha \frac{qa^4}{D}$ (DUPLA SIMETRIA)								
MALHA	COM UTILIZAÇÃO DE ENGASTE DESLOCÁVEL			COM SECCIONAMENTO DA PLACA				
	NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha$	% ERRO		$\alpha$	% ERRO	$\alpha$	% ERRO
2 x 2	25	0,005487	35,1	25	0,004649	14,5	0,004443	9,4
4 x 4	49	0,004757	17,2	49	0,004210	3,7	0,004162	2,5
8 x 8	121	0,004417	8,8	121	0,004099	1,0	0,004087	0,7
12 x 12	225	0,004302	6,0	225	0,004079	0,5	0,004073	0,3
16 x 16	361	0,004243	4,5	361	0,004072	0,3	0,004069	0,2
32 x 32	1225	0,004154	2,3	-	-	-	-	-
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [ 33 ] )	0,004062			0,004062				

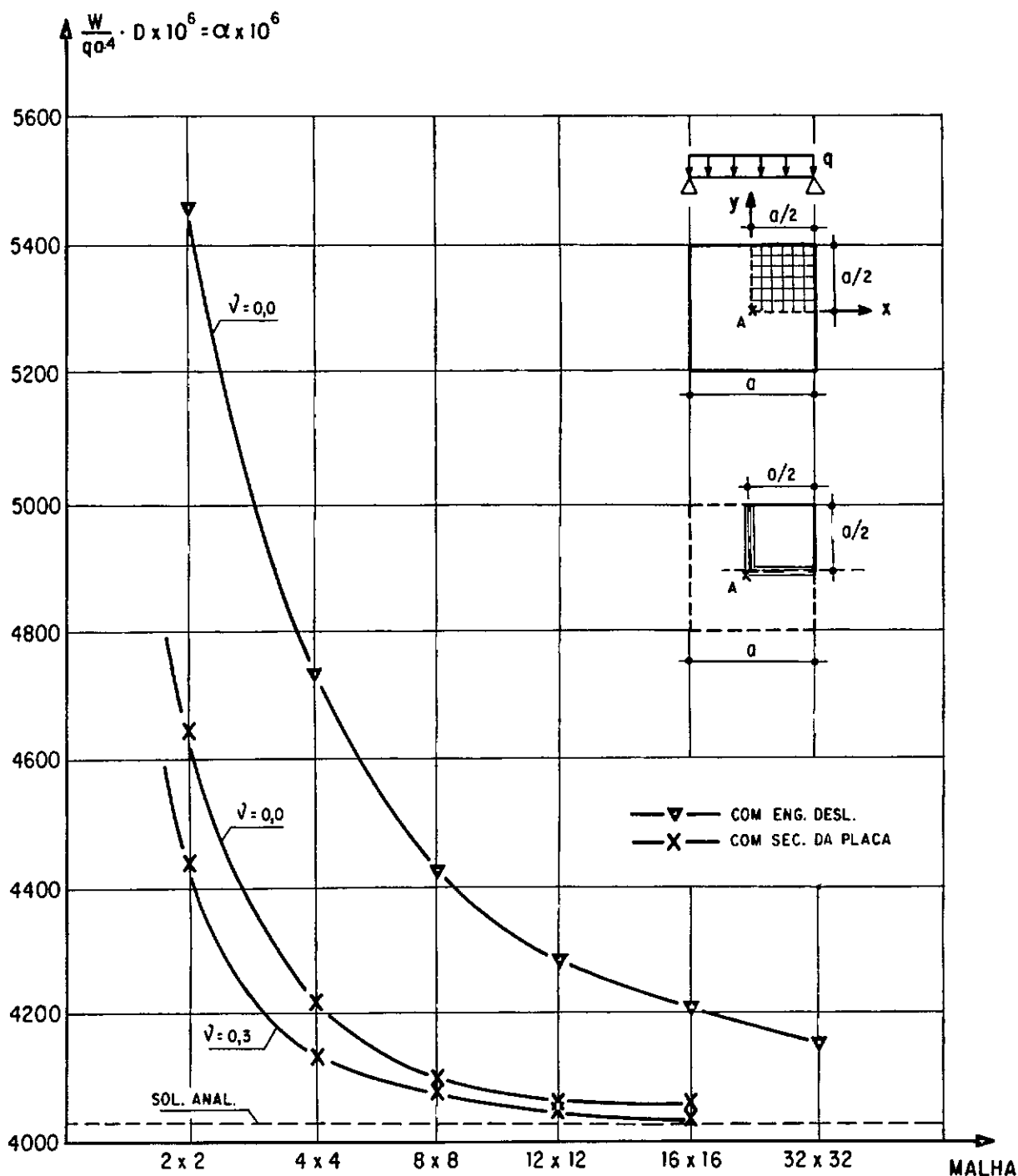


Gráfico VI. 4 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa quadrada simplesmente apoiada e carregada uniformemente (dupla simetria).

rivadas segundas, e conseqüentemente os momentos fletores, divergem no ponto de aplicação da carga. Assim sendo, recorreu-se a um resultado analítico aproximado para os momentos, substituindo-se a carga concentrada por uma outra distribuída sobre uma área reduzida concêntrica à placa e então aplicando Navier, como uma forma de conferência para os valores numéricos obtidos para tais grandezas. Ressalte-se que a área referida coincide com a do elemento de malha 62 x 62.

O deslocamento transversal e os momentos fletores no centro da placa, ocasionados por uma carga concentrada  $P$  são dados, respectivamente, pelas expressões abaixo:

$$w = \alpha_1 \frac{Pa^2}{D}$$

$$M_X = M_Y = \beta_1 \frac{P}{Da^4}.$$

Os valores de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  são comparados às soluções analíticas aproximadas nas tabelas e gráficos relacionados em seguida:

Tabela VI.4 - fornece os valores das constantes  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  para o deslocamento transversal máximo e momentos fletores máximos (ponto central A) na placa.

Gráfico VI.5 - representa os valores das constantes  $\alpha_1$  no ponto central A da placa.

Gráfico VI.6 - representa os valores da constante  $\beta_1$  no ponto central A da placa.

Tab.VI.4 - Valores das constantes " $\alpha_1$ " e " $\beta_1$ " para deslocamento transversal e momentos fletores em uma placa quadrada simplesmente apoiada e carregada no centro

MALHA	NÚMERO DE G.D.L.	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w = \alpha_1 \frac{Pa^2}{D}$				MOMENTO FLETOR $M_x = M_y = \beta_1 P$			
		$\alpha_1$				$\beta_1$			
		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha_1$	% ERRO	$\alpha_1$	% ERRO	$\beta_1$	% ERRO	$\beta_1$	% ERRO
2 x 2	25	0,0250	115,5	0,0212	82,7	0,200	- 45,6	0,220	- 70,1
4 x 4	49	0,0163	40,5	0,0154	32,7	0,239	- 35,0	0,285	- 52,4
8 x 8	121	0,0131	12,9	0,0128	10,3	0,291	- 20,9	0,354	- 33,7
16 x 16	361	0,0121	4,3	0,0120	3,4	0,345	- 6,2	0,426	- 14,1
32 x 32	1225	0,0117	0,9	0,0117	0,9	0,400	8,7	0,479	0,2
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [33])		0,01160 (exato)				0,368 (aproximado)		0,478 (aproximado)	



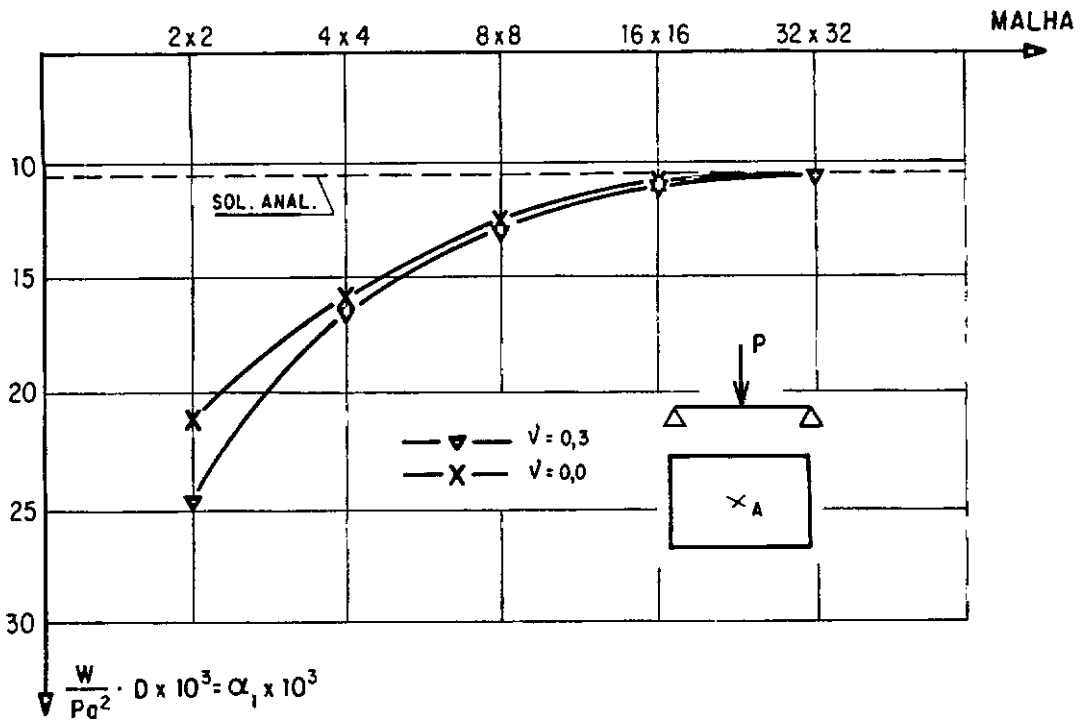


Gráfico VI. 5 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos bordos e carregada no centro.

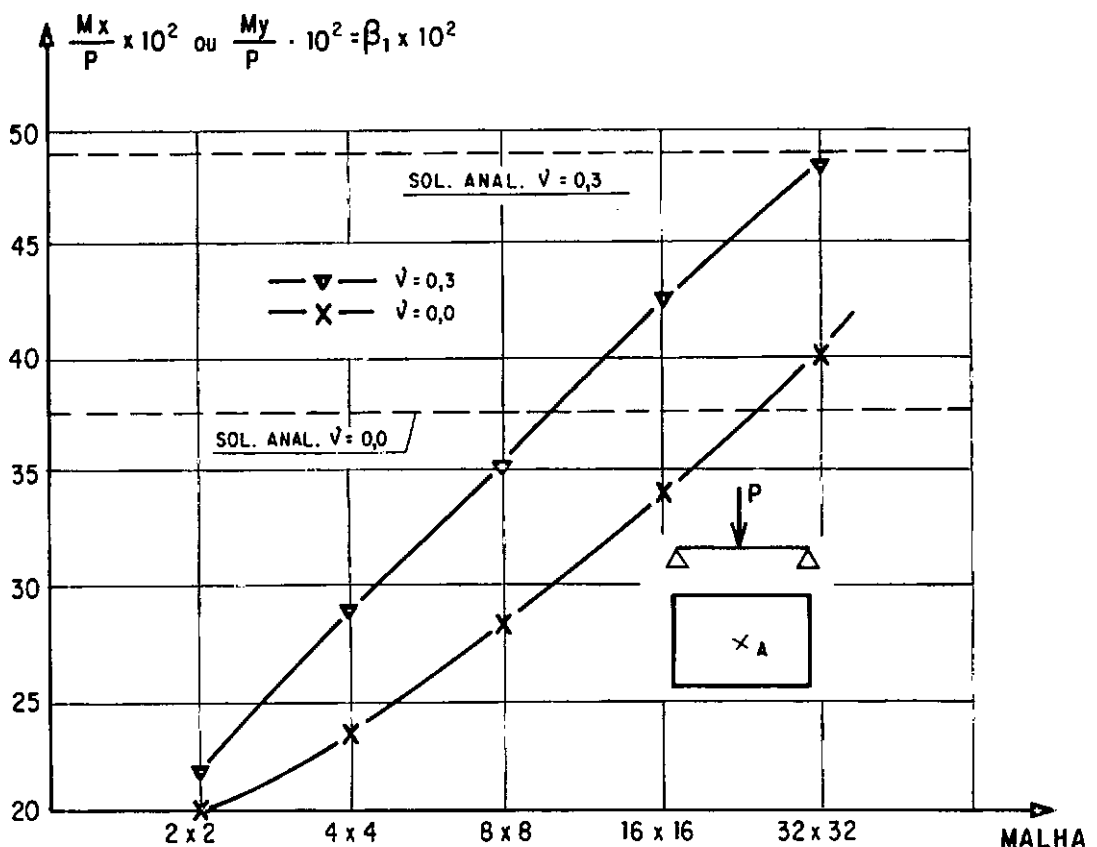


Gráfico VI. 6 - Momento fletor  $M_x = M_y$  no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos bordos e carregada no centro.

### VI.2.3 - Placa Esconsa Simplesmente Apoiada nos Bordos e Uniformemente Carregada

Não obstante as dificuldades matemáticas associadas à sua análise, as placas esconsas têm sido frequentemente utilizadas em modernas estruturas [50].

Usando o M.E.D. com malhas curvilíneas refinadas sucessivamente, efetivou-se a análise de uma placa esconsa simplesmente apoiada nos bordos (Figura VI.2), solicitada por um carregamento uniformemente distribuído.

As propriedades físicas e geométricas da placa analisada são as seguintes:

módulo de elasticidade longitudinal:	E	=	$2,1 \times 10^6$	tf/m <sup>2</sup>
coeficiente de Poisson	:	$\nu$	=	0,0; 0,2; 0,3
espessura da placa	:	h	=	0,10 m
ângulo de esconsidade	:	$\alpha$	=	$60^\circ$
dimensões	:	a x a	=	12 m x 12 m

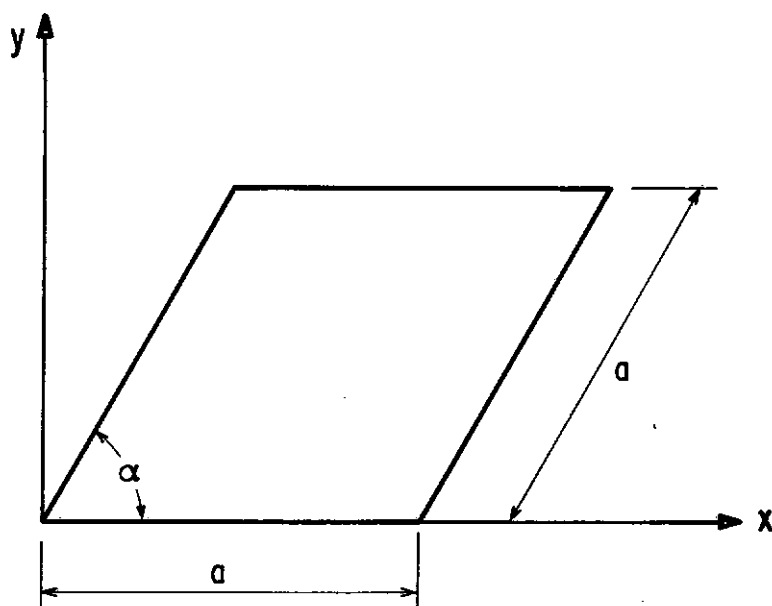


Fig.VI.2 - Placa esconso simplesmente apoiada.

É verificada a convergência do deslocamento transversal máximo e momentos fletores no ponto central A da placa submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $q = 0,3 \text{ tf/m}^2$ .

Os resultados aqui obtidos foram comparados com os apresentados por NÓBREGA [51], mediante a consideração de malhas oblíquas, com as soluções analíticas disponíveis e com os obtidos com o método dos elementos finitos (M.E.F.) através do programa ICES STRUDL II [52]. Foram utilizados elementos finitos triangulares, com três pontos nodais e nove deslocamentos.

Segue-se a relação de tabelas e gráficos utilizados nessa análise.

Tab.VI.5 - Deslocamento transversal "w" no centro de uma placa esconsa ( $60^0$ ) simplesmente apoiada e carregada uniformemente

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL w NO CENTRO DA PLACA (m)											
MALHA	M.E.D. (com malhas arbitrárias)					M.E.F. (STRUDL)			DIF.FIN.CONVENCIONAIS NÓBREGA [ 51 ]		
	NÚMERO DE G.D.L.	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$		NÚMERO DE G.D.L.	$\nu = 0,3$		NÚMERO DE G.D.L.	$\nu = 0,3$	
		w	w	w	% ERRO		w	% ERRO		w	% ERRO
8 x 8	121	0,09096	0,08629	0,08133	-1,8	147	0,07884	-4,8	121	0,08064	-2,6
10 x 10	169	0,09087	0,08651	0,08168	-1,4	243	0,07967	-3,8	169	0,08132	-1,8
12 x 12	144	0,09078	0,08661	0,08186	-1,1	330	0,08037	-2,9	144	0,08173	-1,3
16 x 16	361	0,09067	0,08672	0,08206	-0,9	-	-	-	-	-	-
32 x 32	1225	0,09066	0,08694	0,08237	-0,5	-	-	-	-	-	-
ANALÍTICO (MORLEY [53])		-		0,08281							

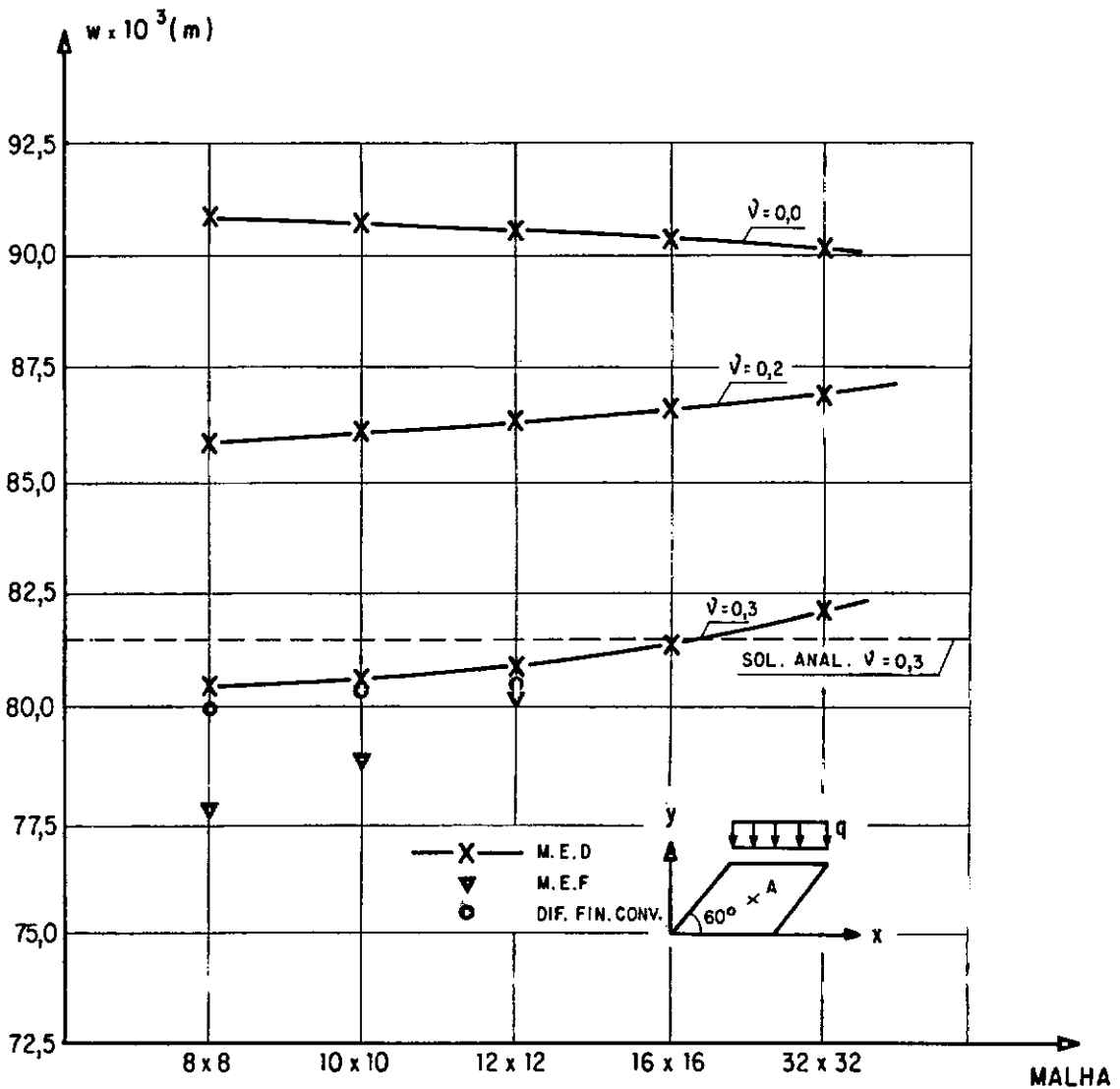


Gráfico VI. 7 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa esconsa uniformemente carregada.

Tab.VI.6 - Momento fletor " $M_x$ " no centro de uma placa esconsa ( $60^\circ$ ) simplesmente apoiada e carregada uniformemente

MOMENTO FLETOR $M_x$ NO CENTRO DA PLACA (tf.m/m)											
MALHA	M.E.D. (com malhas arbitrárias)					M.E.F. (STRU DL)			DIF.FIN.CONVENCIONAIS (NÓBREGA [ 51 ])		
	NÚMERO DE G.D.L.	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$		NÚMERO DE G.D.L.	$\nu = 0,3$		NÚMERO DE G.D.L.	$\nu = 0,3$	
		$M_x$	$M_x$	$M_x$	% ERRO		$M_x$	% ERRO		$M_x$	% ERRO
8 x 8	121	1,117	1,384	1,515	-0,8	147	1,482	-3,0	121	1,476	-3,4
10 x 10	169	1,117	1,387	1,521	-0,4	243	1,483	-2,9	169	1,496	-2,1
12 x 12	225	1,116	1,389	1,524	-0,3	330	1,496	-2,1	225	1,508	-1,3
16 x 16	361	1,114	1,390	1,527	-0,1	-	-	-	-	-	-
32 x 32	1225	1,113	1,392	1,531	-0,2	-	-	-	-	-	-
ANALÍTICO (MORLEY [ 53 ])		-			1,528						

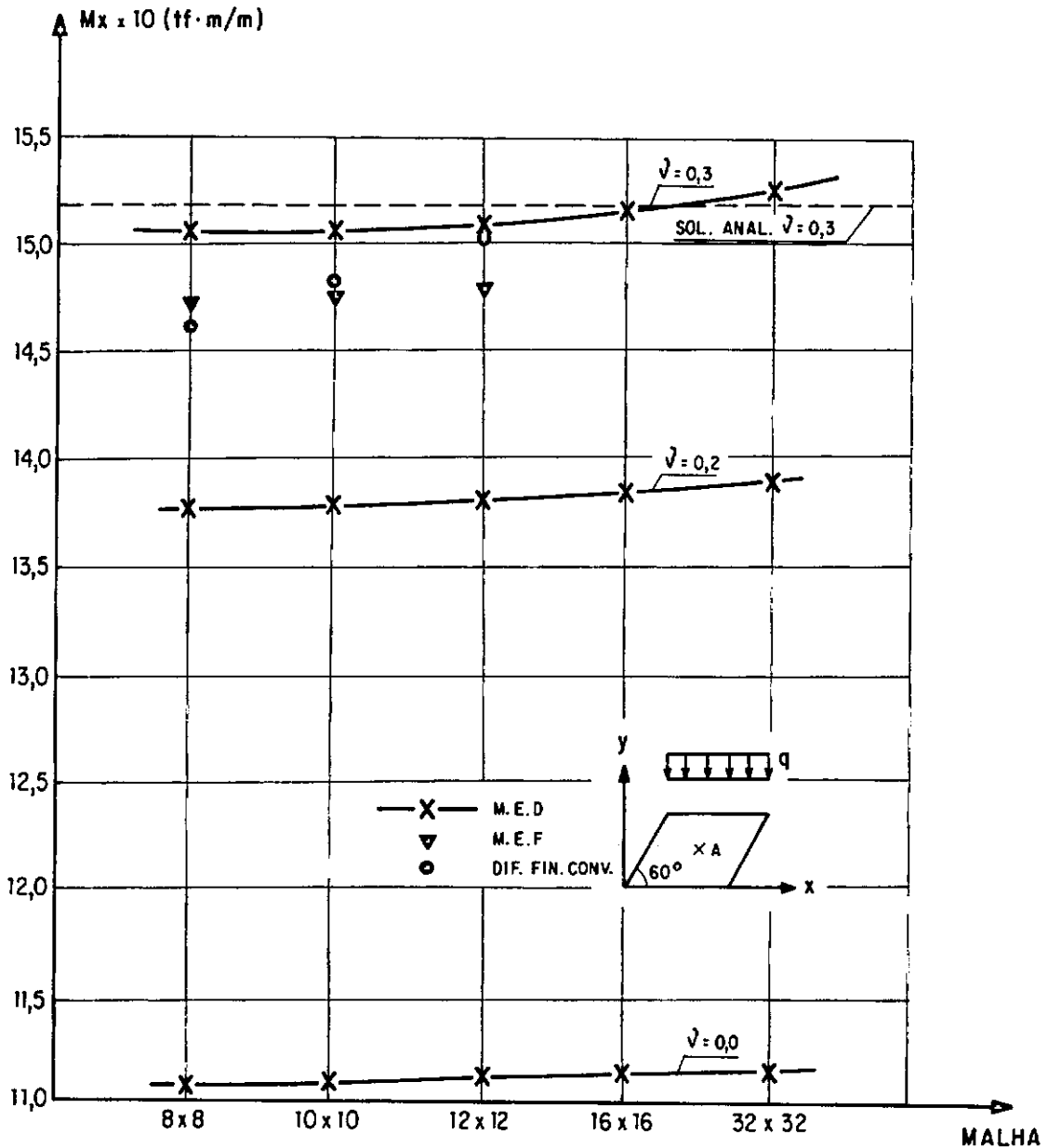


Gráfico VI.8 - Momento fletor  $Mx$  no centro da placa esconsa uniformemente carregada.

Tab.VI.7 - Momento fletor " $M_y$ " no centro de uma placa esconsa ( $60^\circ$ ) simplesmente apoiada e carregada uniformemente

MOMENTO FLETOR $M_y$ NO CENTRO DA PLACA (tf.m/m)											
MALHA	M.E.D. (com malhas arbitrárias)					M.E.F. (STRU DL)			DIF.FIN.CONVENCIONAIS (NÓBREGA [51])		
	NÚMERO DE G.D.L.	$v = 0,0$	$v = 0,2$	$v = 0,3$		NÚMERO DE G.D.L.	$v = 0,3$		NÚMERO DE G.D.L.	$v = 0,3$	
		$M_y$	$M_y$	$M_y$	% ERRO		$M_y$	% ERRO		$M_y$	% ERRO
8 x 8	121	1,458	1,659	1,758	1,4	147	1,702	-1,8	121	1,724	-0,5
10 x 10	169	1,440	1,648	1,751	1,0	243	1,701	-1,8	169	1,729	-0,2
12 x 12	144	1,428	1,641	1,746	0,7	330	1,710	-1,3	144	1,732	-0,1
16 x 16	361	1,416	1,633	1,740	0,4	-	-	-	-	-	-
32 x 32	1225	1,404	1,625	1,735	0,1	-	-	-	-	-	-
ANALÍTICO (MORLEY [53])		-		1,733							



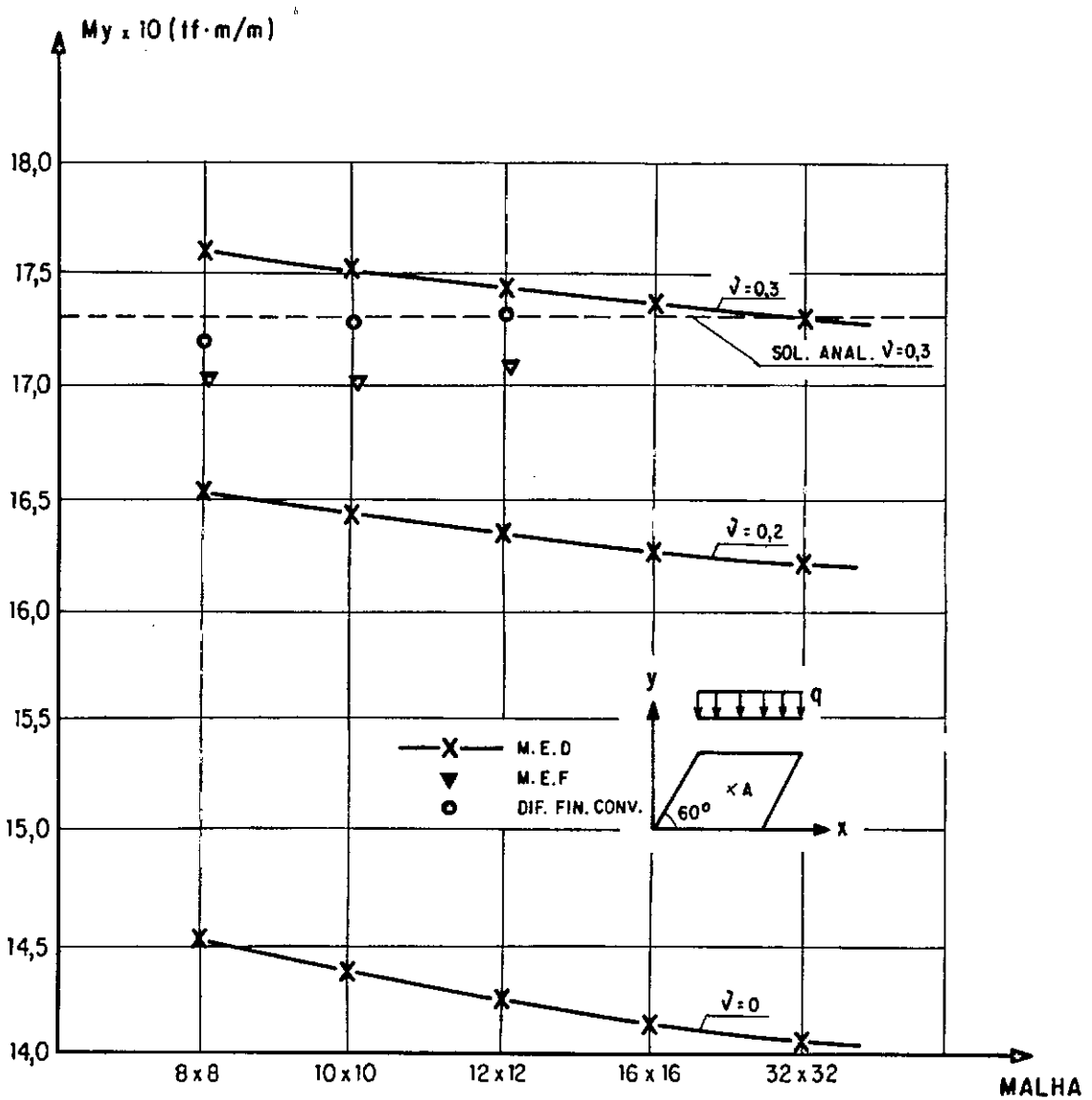


Gráfico VI.9 - Momento fletor  $M_y$  no centro da placa esconsa uniformemente carregada.

a) Tabelas:

Tabela VI.5 - fornece os valores da flecha máxima da placa (ponto central A).

Tabela VI.6 - fornece os valores do momento fletor  $M_x$  no ponto central A da placa.

Tabela VI.7 - fornece os valores do momento fletor  $M_y$  no ponto central A da placa.

b) Gráficos:

Gráfico VI.7 - representa os valores da flecha máxima.

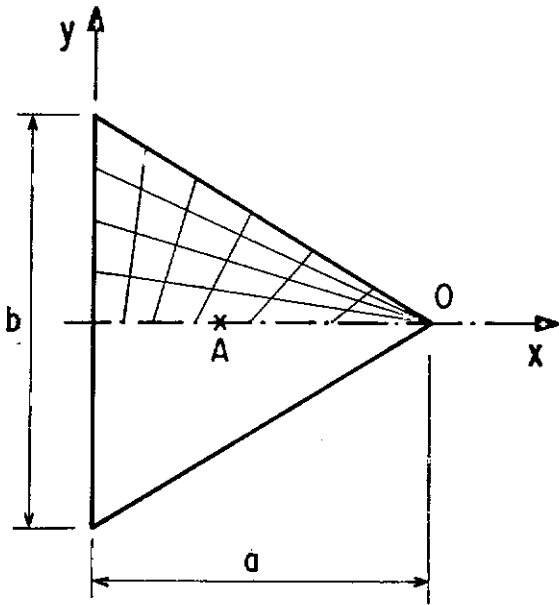
Gráfico VI.8 - representa os valores do momento fletor  $M_x$  no ponto central A da placa.

Gráfico VI.9 - representa os valores do momento fletor  $M_y$  no ponto central A da placa.

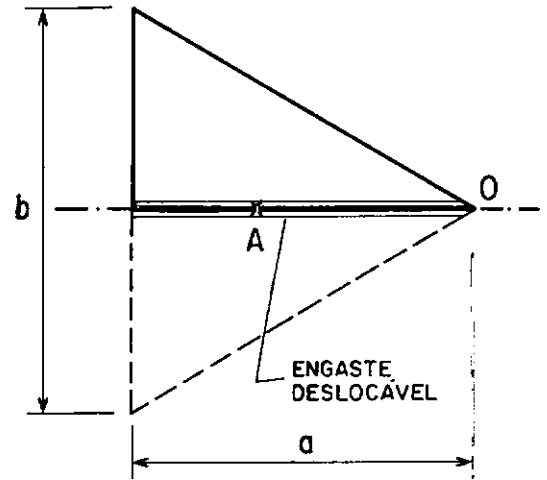
#### VI.2.4 - Placa Triangular Equilátera Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada Uniformemente

A placa analisada em forma de um triângulo equilátero com os bordos simplesmente apoiados (Figura VI.3) está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído  $q$ . Com a finalidade de utilizar-se a geração de malhas quadriláteras curvilíneas fornecida pelo programa, acresceu-se de valores mínimos ( $\pm 0,001$  do comprimento do lado da placa) a ordenada  $y = 0$  do vértice O da placa, assimilando o seu contorno a um polígono.

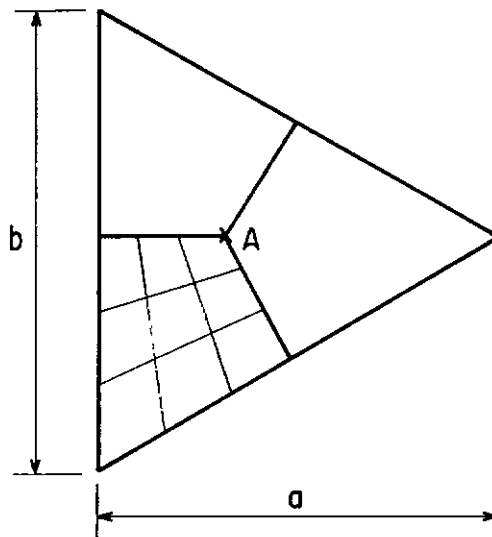
Também, neste caso, considerou-se a discretização da placa inteira, além dos casos de simetria. Devido à simetria em



(a) Simetria simples por seccionamento da placa.



(b) Simetria simples com utilização de engaste deslocável.



(c) Dupla simetria por seccionamento da placa

Figura VI-3

relação ao eixo x, analisou-se o triângulo retângulo pelos processos indicados nas Figuras IV.3a e IV.3b. Ainda face à simetria, considerou-se apenas um terço da placa (Figura IV.3c), evitando-se deste modo a aproximação de sua forma geométrica.

Seguem-se os valores das propriedades físicas e geométricas da placa analisada.

Rigidez à flexão	$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (E: módulo de elasticidade; h: espessura da placa)
Coeficiente de Poisson	$\nu$
Altura do triângulo	a
Comprimento do lado	b

São adotados os valores 0,0 e 0,3 para o coeficiente de Poisson  $\nu$ .

A solução para o problema em questão apresenta a flecha máxima e os momentos fletores no ponto central A, respectivamente, como

$$w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$$

$$M_x = M_y = \beta_2 qa^2.$$

Os valores exatos [33] e os obtidos através do M.E.D. para as constantes  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  são apresentados e comparados nas tabelas e gráficos seguintes:

a) Tabelas:

Tabela VI.8 - fornece os valores das constantes  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  no ponto central A da placa.

Tabela VI.9 - fornece os valores da constante  $\alpha_2$  no ponto A considerando-se metade da placa original.

Tab.VI.8 - Valores das constantes " $\alpha_2$ " e " $\beta_2$ " para deslocamento transversal e momentos fletores em uma placa triangular equilátera simplesmente apoiada e carregada uniformemente

MALHA	NÚMERO DE G.D.L.	DESL. TRANSVERSAL $w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$ $\alpha_2$				MOMENTO FLETOR $M_x = \beta_2 qa^2$ $\beta_2$				MOMENTO FLETOR $M_y = \beta_2 qa^2$ $\beta_2$			
		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$		$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha_2$	% ERRO	$\alpha_2$	% ERRO	$\beta_2$	% ERRO	$\beta_2$	% ERRO	$\beta_2$	% ERRO	$\beta_2$	% ERRO
9 x 4	84	0,0006336	9,5	0,0006176	6,7	0,01489	7,2	0,01890	4,7	0,01520	9,4	0,01889	4,6
12 x 8	165	0,0006014	3,9	0,0005958	2,9	0,01426	2,7	0,01838	1,8	0,01430	2,9	0,01839	1,9
15 x 16	342	0,0005903	2,0	0,0005878	1,6	0,01405	1,1	0,01821	0,9	0,01410	1,5	0,01824	1,0
24 x 24	729	0,0005853	1,1	0,0005842	0,9	0,01398	0,6	0,01815	0,5	0,01400	0,8	0,01816	0,6
30 x 32	1155	0,0005837	0,9	0,0005830	0,7	0,01396	0,5	0,01813	0,4	0,01397	0,6	0,01813	0,4
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [33])		0,0005787				0,01389		0,01805		0,01389		0,01805	

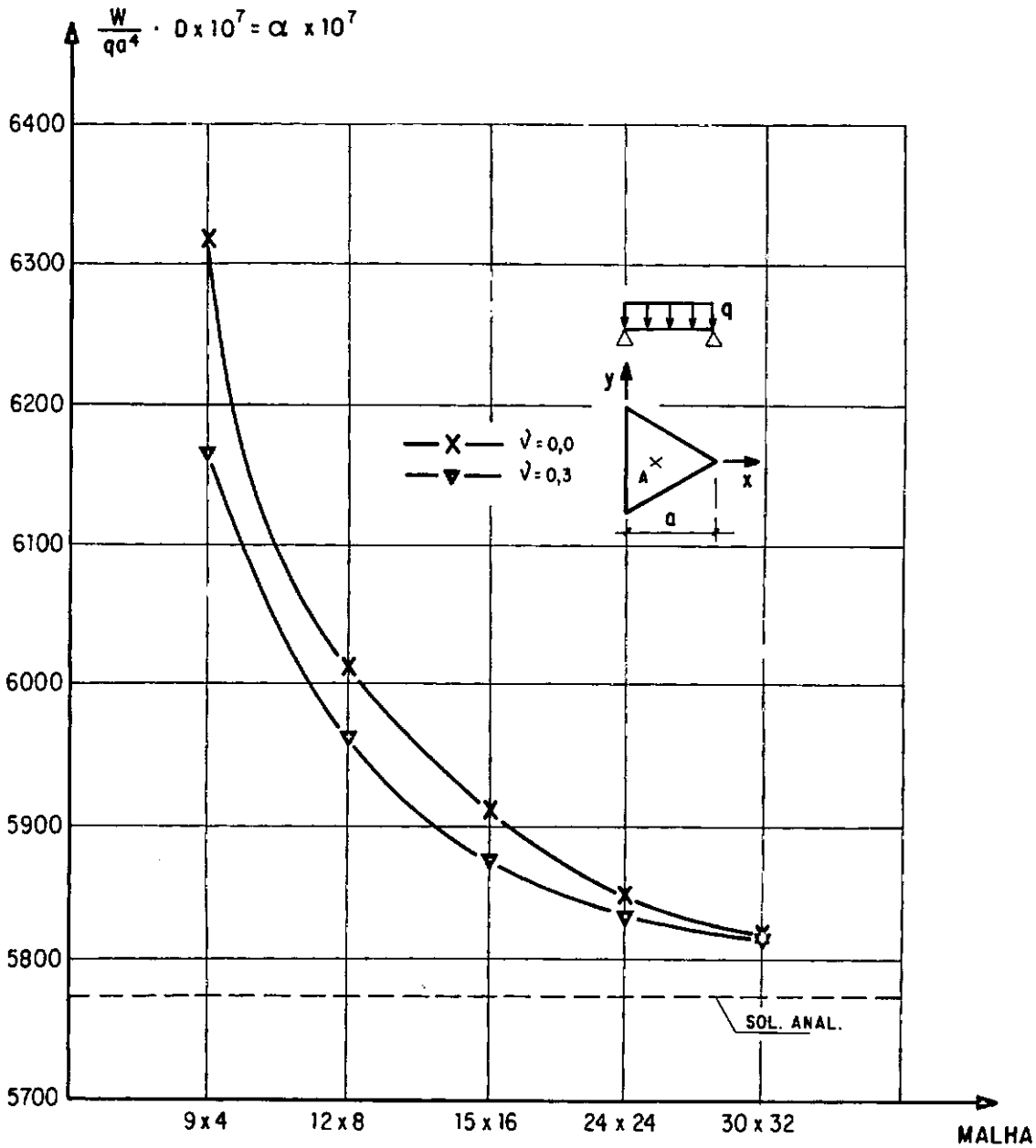


Gráfico VI.10 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa triangular uniformemente carregada.

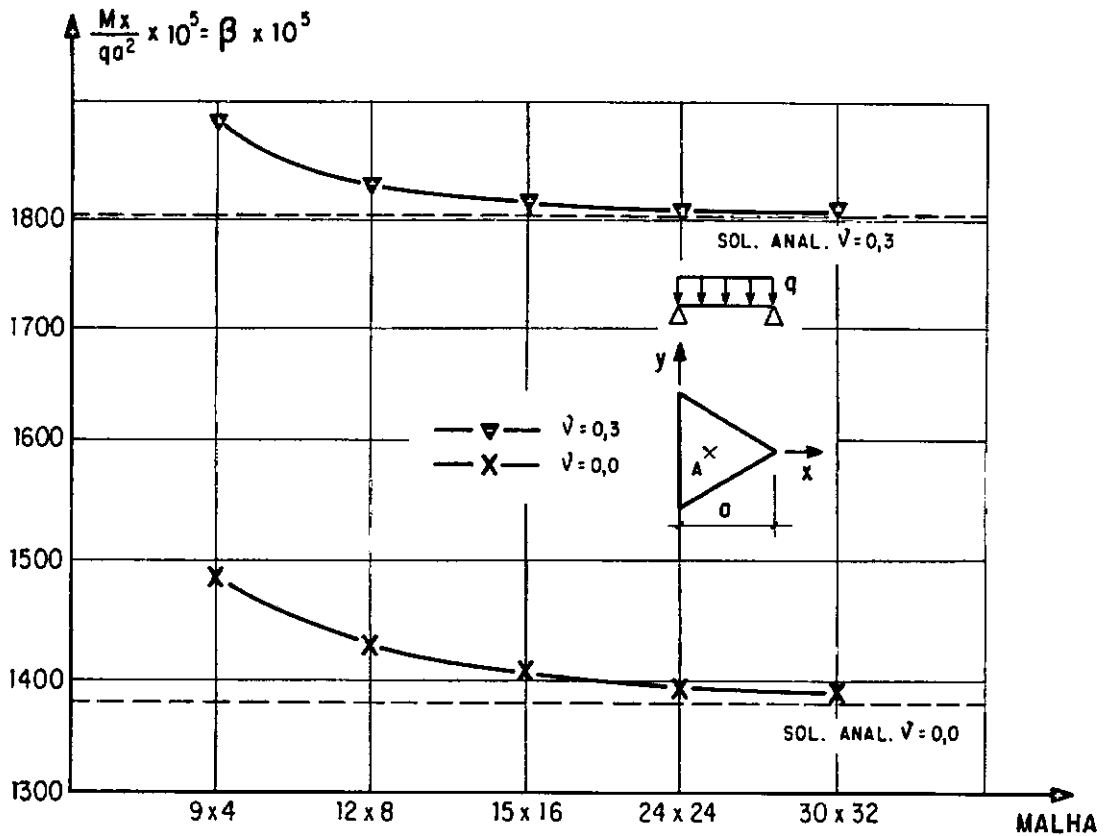


Gráfico VI.11a - Momento fletor  $M_x$  no centro da placa triangular uniformemente carregada.

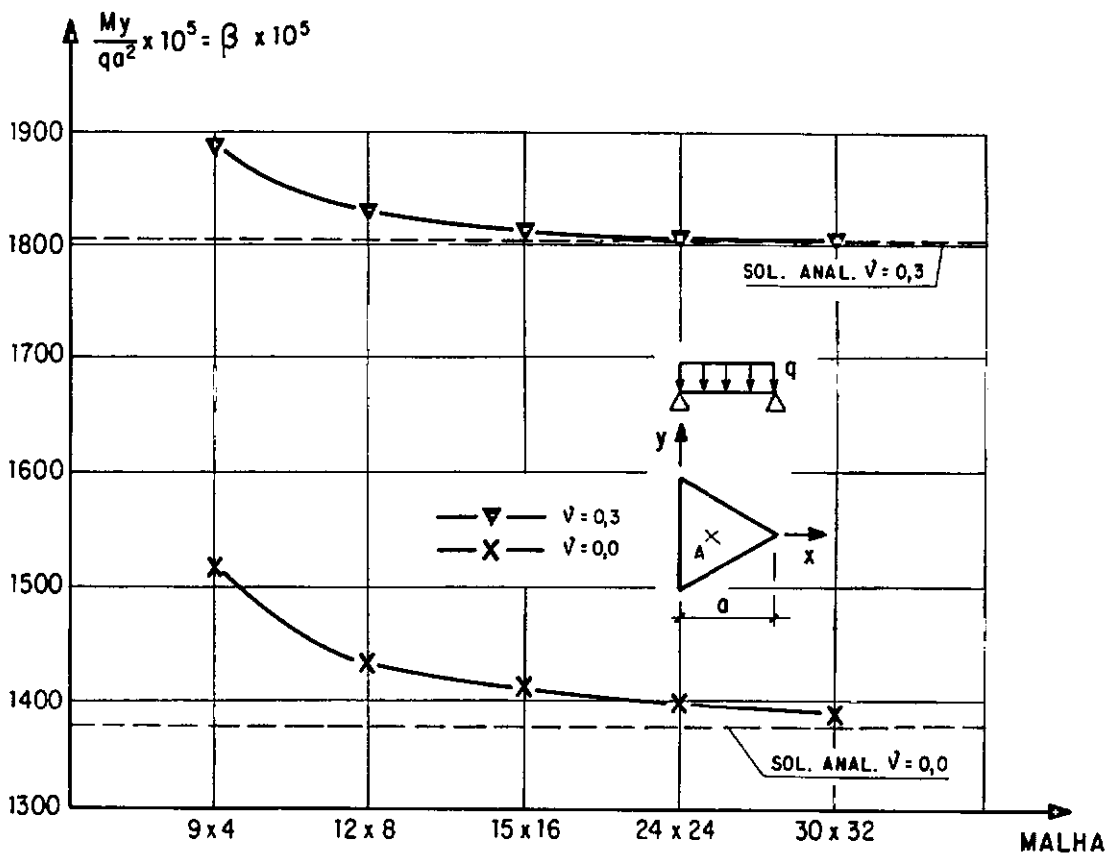


Gráfico VI.11b - Momento fletor  $M_y$  no centro da placa triangular uniformemente carregada.

Tab.VI.9 - Valores da constante " $\alpha_2$ " para deslocamento  $w$  no centro de uma placa triangular equilátera simplesmente apoiada e carregada uniformemente (simetria simples)

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$ (SIMETRIA SIMPLES)										
MALHA	COM UTILIZAÇÃO DE ENGASTE DESLOCÁVEL					COM SECCIONAMENTO DA PLACA				
	NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$		NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha_2$	% ERRO	$\alpha_2$	% ERRO		$\alpha_2$	% ERRO	$\alpha_2$	% ERRO
9 x 4	84	0,0006368	10,0	0,0006148	6,2	84	0,0006040	4,4	0,0005965	3,1
12 x 8	165	0,0006121	5,8	0,0006020	4,0	165	0,0005924	2,4	0,0005890	1,8
12 x 12	225	0,0006046	4,5	0,0005973	3,2	225	0,0005906	2,0	0,0005877	1,5
15 x 16	342	0,0005985	3,4	0,0005934	2,5	342	0,0005877	1,5	0,0005858	1,2
24 x 24	729	0,0005914	2,2	0,0005885	1,7	729	0,0005840	0,9	0,0005832	0,8
32 x 32	1225	0,0005886	1,7	0,0005860	1,3	-	-	-	-	-
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [33])		0,0005787				0,0005787				



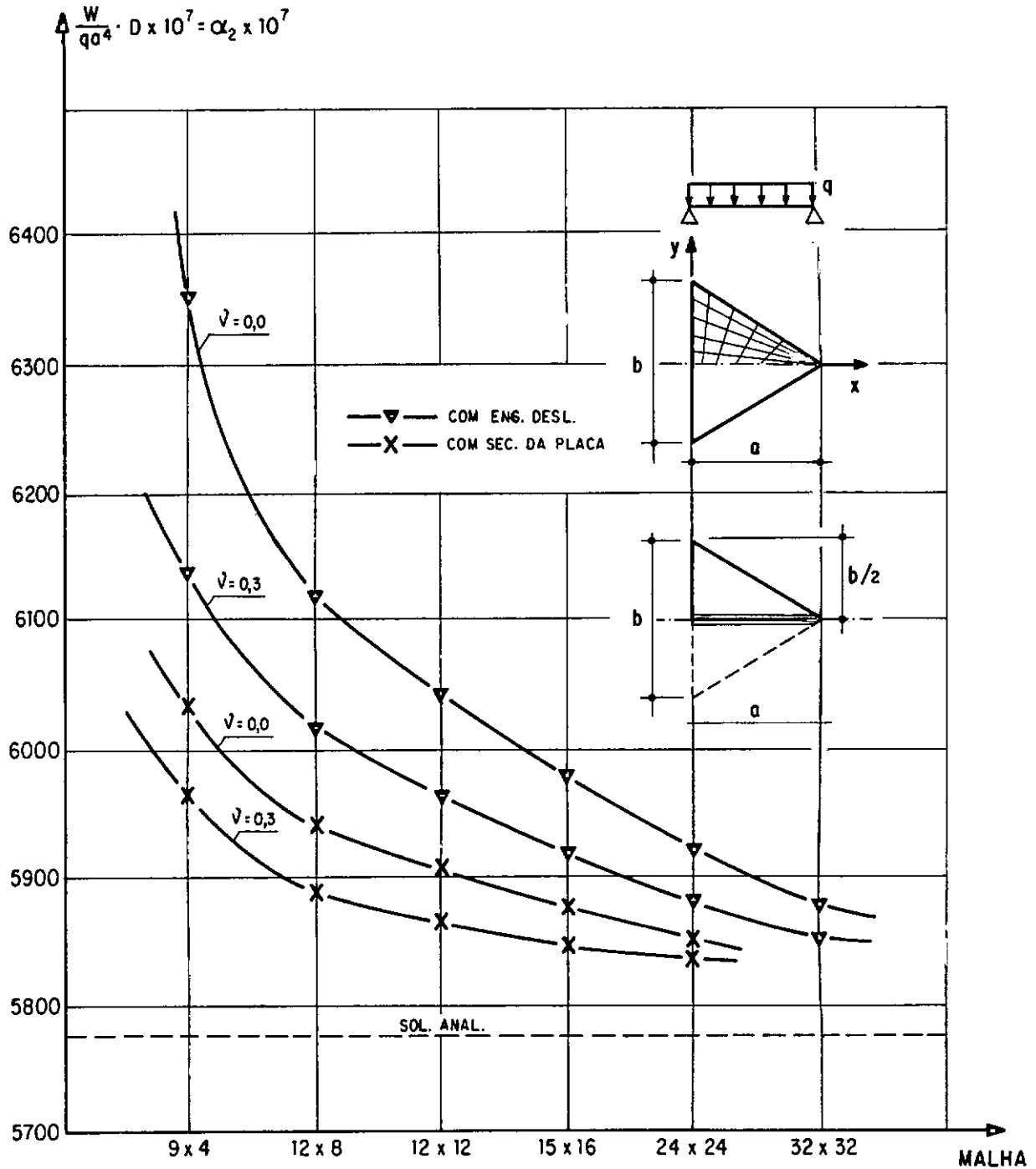


Gráfico VI.12 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa triangular equilátera simplesmente apoiada e carregada uniformemente (simetria simples).

Tab.VI.10 - Valores da constante " $\alpha_2$ " para o deslocamento  $w$  no centro de uma placa triangular simplesmente apoiada e carregada uniformemente (dupla simetria)

DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$ (DUPLA SIMETRIA)					
MALHA	COM SECCIONAMENTO DA PLACA				
	NÚMERO DE INCÓGNITAS	$\nu = 0,0$		$\nu = 0,3$	
		$\alpha_2$	% ERRO	$\alpha_2$	% ERRO
4 x 4	49	0,0005830	0,7	0,0005792	0,1
8 x 8	121	0,0005858	1,2	0,0005909	2,1
12 x 12	225	0,0005862	1,3	0,0005934	2,5
16 x 16	361	0,0005866	1,4	0,0005946	2,7
20 x 20	529	0,0005869	1,4	0,0005954	2,9
24 x 24	729	0,0005872	1,5	0,0005959	3,0
ANALÍTICO (TIMOSHENKO [33])		0,0005787		0,0005787	

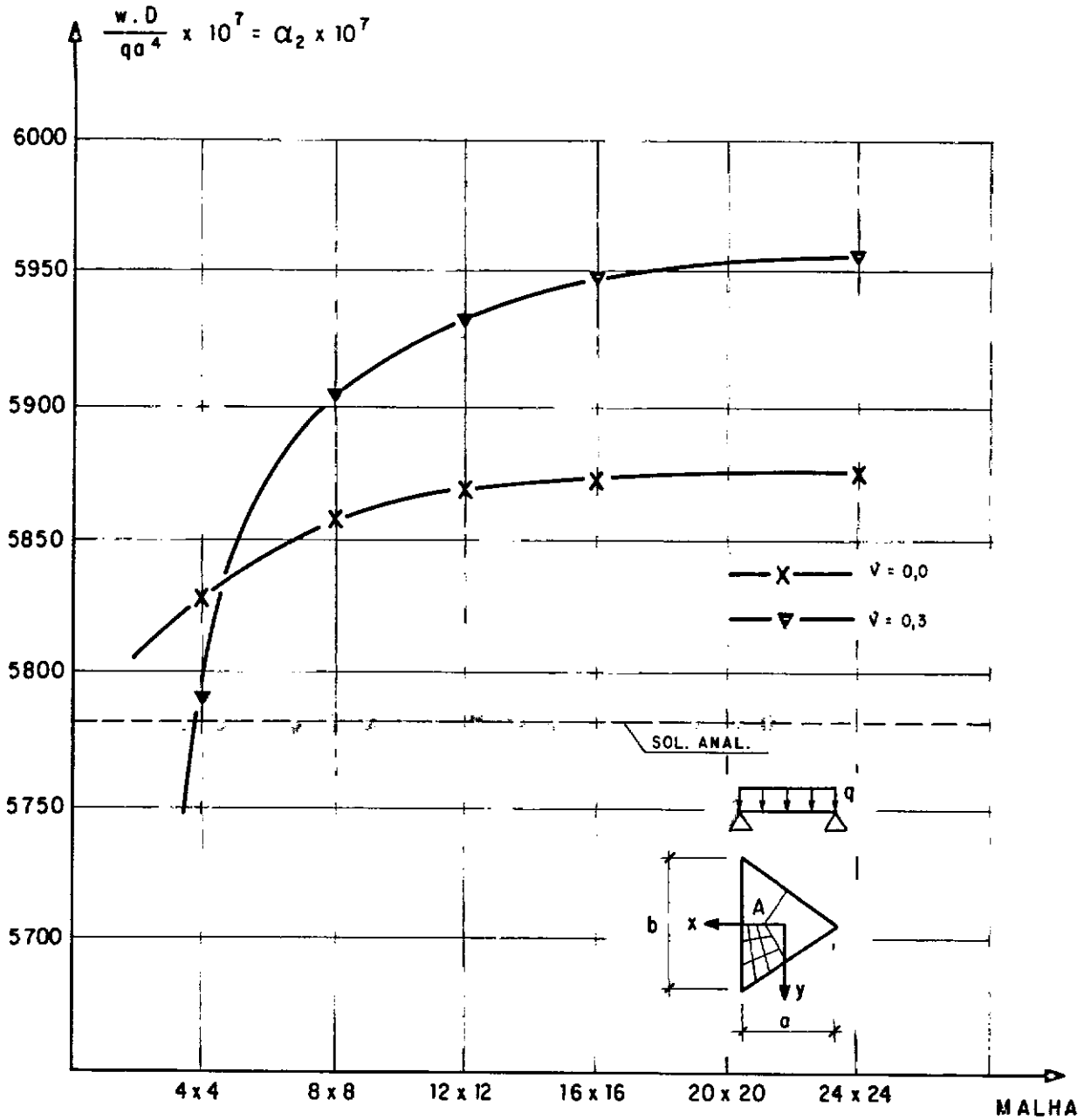


Gráfico VI.13 - Deslocamento transversal  $w$  no centro da placa triangular equilátera simplesmente apoiada nos bordos e carregada uniformemente (dupla simetria).

Tabela VI.10 - fornece os valores da constante  $\alpha_2$  no ponto A considerando-se um terço da placa original.

b) Gráficos:

Gráfico VI.10 - representa os valores da constante  $\alpha_2$  no ponto central A.

Gráfico VI.11 - representa os valores da constante  $\beta_2$  no ponto central A.

Gráfico VI.12 - representa os valores da constante  $\alpha_2$  no ponto A, considerando-se metade da placa original.

Gráfico VI.13 - representa os valores da constante  $\beta_2$  no ponto A, considerando-se um terço da placa original.

### VI.3 - Análise dos Resultados

#### VI.3.1 - Considerações Gerais

Analisa-se neste item os resultados apresentados neste trabalho, através da formulação do M.E.D. com malhas arbitrárias, procedendo-se à comparação destes com soluções analíticas e, eventualmente, com outras provenientes de técnicas numéricas diferentes.

### VI.3.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada Uniformemente

Observando a Tabela VI.1 e os Gráficos VI.1 e VI.2 conclui-se que o M.E.D. com malhas arbitrárias conduz a resultados com excelente concordância em relação aos obtidos por TIMOSHENKO, no estudo desse problema clássico.

A convergência para o deslocamento transversal e para os momentos fletores no centro da placa ocorre para valores superiores. Constata-se que os resultados obtidos mesmo com uma malha grosseira  $4 \times 4$  podem ser considerados bons.

Observa-se ainda que os valores obtidos, tanto para flechas como para momentos fletores, utilizando-se coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  são melhores do que aqueles alcançados com  $\nu = 0,0$ .

Nas Tabelas VI.2 e VI.3 estão relacionados os resultados obtidos para o deslocamento transversal no centro da placa, considerando-se simples e dupla simetria, respectivamente. Pode-se verificar que os valores advindos da discretização de um dos setores simétricos delimitados por planos de simetria (seccionamento da placa) são melhores do que aqueles provenientes de uma estrutura substituta da placa original (utilização de engaste deslocável), embora esteja envolvido em ambos os casos o mesmo número de incógnitas. Tal fato se deve às razões já apresentadas no capítulo anterior.

Os Gráficos VI.3 e VI.4 comparam as curvas da variação do deslocamento transversal no centro da placa com o refinamento

da malha, mediante a consideração dos casos de simples e dupla simetria, respectivamente, pelos dois processos citados. Os gráficos revelam uma ótima convergência dos valores para a solução analítica, sendo naturalmente melhores aqueles obtidos quando da discretização de apenas um quarto da placa (dupla simetria).

Em todos os casos considerados no estudo da placa quadrada, constata-se uma convergência monotônica dos resultados para a solução analítica.

### VI.3.3 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada e Carregada no Centro

No Gráfico VI.5 nota-se claramente uma ótima convergência para a solução analítica [33], do deslocamento transversal no centro da placa. Considerando-se os momentos fletores máximos, representados no Gráfico VI.6, constata-se uma boa concordância com os valores estimados analiticamente (de forma aproximada), utilizando-se a solução em série de Navier para um carregamento distribuído (de resultante P) numa pequena região quadrada concêntrica à placa.

A convergência para a flecha e para os momentos fletores no centro da placa ocorre para valores superiores.

### VI.3.4 - Placa Esconsa (60°) Simplesmente Apoiada nos Bordos e Uniformemente Carregada

O exame das Tabelas VI.5 a VI.7 e dos Gráficos VI.7 a VI.9 permite constatar uma melhor aproximação nos valores prove-

nientes da utilização do M.E.D. com malhas arbitrárias. Nota-se claramente que esses resultados são bem melhores do que os conseguidos com o método dos elementos finitos (M.E.F.) através do programa STRUDLII, além de exigirem um menor número de graus de liberdade para um mesmo intervalo de malha. Os resultados obtidos por NÓBREGA utilizando diferenças finitas convencionais são também mais precisos do que os do M.E.F. acima referidos, porém menos precisos em relação àqueles conseguidos através do M.E.D. Observa-se que o valor para a flecha central alcançado com diferenças finitas convencionais na malha oblíqua  $10 \times 10$  é equivalente ao resultado de uma arbitrária  $8 \times 8$  no M.E.D.

Verifica-se ainda que, nas curvas de momentos fletores máximos (Gráficos VI.8 e VI.9), a discrepância entre os valores obtidos com o M.E.D. e os demais métodos se acentua ainda mais.

A convergência dos valores provenientes da utilização de malhas curvilíneas (M.E.D.) é bem mais rápida do que a com malhas oblíquas (NÓBREGA). Esta perda de eficiência por parte dos resultados de NÓBREGA se deve, sobretudo, à falta de um sistema local ortogonal para os pontos nodais da malha.

De um modo geral, pode-se dizer que as melhores soluções são obtidas com o M.E.D., através da utilização de malhas arbitrárias, as quais convergem monotonicamente. Importante é ressaltar que os resultados são muito bons apesar da distorção considerável da malha, nas proximidades do canto esconso.

É ainda interessante estabelecer uma confrontação entre a convergência dos resultados da placa esconsa com a dos va-

lores alcançados para a placa quadrada. Constatase que os valores de flecha e momentos fletores centrais convergem mais rapidamente na placa ortogonal do que na esconsa.

### VI.3.5 - Placa Triangular Equilátera Simplesmente Apoiada nos Bordos e Carregada no Centro

O exame do Gráfico VI.8 revela uma boa convergência do deslocamento transversal no centro da placa para a solução analítica [33]. Novamente, verificam-se melhores resultados com a adoção do coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Nos Gráficos VI.9 e VI.10 pode-se observar uma rápida convergência dos resultados de momentos fletores, para os analíticos [33]. Verifica-se que, a partir da malha  $12 \times 18$ , as curvas permanecem quase horizontais tanto para  $\nu = 0,0$  como para  $\nu = 0,3$ . A convergência para flechas e momentos fletores, no centro da placa, é monotônica e se dá para valores superiores.

O Gráfico VI.11 apresenta as curvas de variação da flecha central com o refinamento da malha, considerando-se a simetria simples pelos processos descritos no capítulo anterior. Constatase que os melhores resultados são os provenientes da discretização de metade da placa (triângulo retângulo), sem a utilização de engastes deslocáveis. A discrepância entre os valores obtidos com os dois processos é de aproximadamente 3%. Pode-se dizer que os resultados alcançados com a consideração da simetria simples são bons, porém piores do que aqueles conseguidos com a discretização da placa inteira. Tal fato pode ser explicado pe-



la maior distorção da malha nas proximidades do vértice O da placa triangular.

Finalmente avaliam-se, através do Gráfico VI.12, os valores de flecha máxima para o caso de dupla simetria (discretização de um terço da placa). Devido às constatações nos resultados anteriores, procurou-se avaliar aqui somente a discretização simples de um terço da placa (dupla simetria), sem se recorrer a uma estrutura substituta. Os resultados para flecha central podem ser considerados satisfatórios, mesmo com uma notória redução no número de incógnitas. Porém, este tipo de discretização proporcionou resultados não tão bons quanto os obtidos na consideração da simetria simples. Sabe-se ser aqui desnecessária a aproximação da forma geométrica da placa, para a geração da malha. Entretanto, devido à esconsideade do polígono discretizado (um terço da placa), os resultados alcançados para flecha máxima apresentam percentagens de erro superiores às avaliadas nos casos anteriores.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES

#### VII.1 - Introdução

Reportando-se ao conteúdo dos capítulos precedentes, e com base na bibliografia consultada, são apresentados comentários com caráter de conclusões gerais. Da mesma forma, conscientizando-se da importância do assunto abordado dentro da análise estrutural, são sugeridos estudos adicionais e idéias para prosseguimento da presente pesquisa.

#### VII.2 - Conclusões

As diferenças finitas vêm ultimamente assimilando características importantes da formulação do método dos elementos finitos, de modo a suprir muitas de suas deficiências e limitações. Pode-se dizer que o método das diferenças finitas encontrou na aproximação variacional do método dos elementos finitos uma maneira de gerarem-se equações simétricas, o análogo discreto de um sistema de equações diferenciais auto-adjuntas, além de superados outros aspectos que tenham impedido por certo tempo o seu desenvolvimento e expansão.

O método apresentado propõe a extensão do campo de aplicação das diferenças finitas energéticas através da inclusão de modelos isoparamétricos curvos. O procedimento adotado possibilita abranger-se uma variedade de problemas de flexão de placas com diferentes formas, condições de contorno e carregamento.

O modelo flexível referido é um eficiente instrumento numérico de representação das equações diferenciais parciais em regiões de contornos irregulares possíveis de serem discretizadas através de malhas quadriláteras adequadas. Sendo esta aproximação uma extensão natural da metodologia clássica de diferenças finitas, muitas de suas idéias e procedimentos puderam ser utilizados juntamente com a malha flexível.

O erro de discretização relativo a aproximações diferenciais em malhas flexíveis distribui-se por toda a região analisada, evitando-se assim a sua concentração nas proximidades de bordos curvos. Tal fato decorre do espalhamento da distorção por sobre todas as células da malha, como se mostra na Figura I.4.

Uma vantagem imediata proveniente da natureza variacional da formulação apresentada é permitir que sejam prescritas apenas as condições de contorno geométricas. Esta facilidade de consideração das condições de bordo torna a referida formulação superior à clássica de diferenças finitas. Além do mais, por envolver derivadas de ordem inferior, possibilita obterem-se resultados com menor erro de discretização.

Esse procedimento se distingue também do método das diferenças finitas por ser numericamente estável, uma vez que a matriz dos coeficientes de suas equações algébricas é positiva-definida.

A utilização do método energético de diferenças finitas com malhas arbitrárias na análise linear de placas demonstra que os resultados obtidos para deslocamento transversal e momen-

to fletor alcançam uma ótima concordância com as soluções analíticas e outras numéricas existentes. Ressalte-se ainda que as soluções conseguidas podem ser consideradas satisfatórias mesmo com malhas não muito refinadas.

Verificou-se que no método energético de diferenças finitas, para um espaçamento constante de malha, as equações algébricas associadas às derivadas dos deslocamentos dos pontos nodais no funcional de energia correspondem às equações de Euler do problema variacional na forma finita.

Por razões já mencionadas de similaridades de formulações, procurou-se apresentar este novo procedimento em uma linha semelhante à do método dos elementos finitos, seguindo-se as mesmas etapas de análise estrutural. Objetivou-se com isto aproveitar a experiência acumulada na sistematização, além de uma maior facilidade de compreensão.

Face à diversificação dos sistemas de computação, não se procurou estimar o tempo necessário para a execução do programa, e assim estabelecer comparações. No entanto segundo BUSHNELL [7], em geral o tempo computacional exigido na formação de matrizes globais é duas a seis vezes maior no método dos elementos finitos do que no método energético de diferenças finitas, considerando-se o mesmo número de pontos nodais. Isto se deve principalmente à necessária consideração de apenas um ponto nodal para a avaliação da densidade de energia em um modelo no método energético de diferenças finitas, enquanto que no método dos elementos finitos são necessários mais pontos de integração de Gauss em cada elemento. Uma vez que o método proposto envolve a trans

formação de coordenadas como um passo adicional ao procedimento usual do método energético de diferenças finitas, o tempo computacional que lhe é relativo é ligeiramente maior.

De acordo com FREY [25], o erro de truncamento local depende da distorção, sendo mínimo no caso de uma configuração quadrada (não distorcida). GORDON e HALL [49] estimam um erro de discretização da ordem  $O(\gamma_h h^2)$  para funções, quando se utilizam elementos isoparamétricos Lagrangianos. Utilizando-se esquemas de diferenças finitas centrais na diferenciação destas funções, obtêm-se erros de truncamento da ordem  $O(h^2)$ .

As propriedades de convergência dependem obviamente de cada caso analisado. Entretanto, pode-se afirmar, em caráter geral, que no caso de convergência monotônica, segundo a extrapolação introduzida por RICHARDSON [54], esperam-se taxas da ordem  $O(\gamma_h'' h^2)$ . Isto quer dizer que o erro associado aos deslocamentos transversais reduz-se de  $\frac{1}{4} \cdot \gamma_h'$ , quando se considera metade do espaçamento de malha. Ressalte-se [7] que estas propriedades não diferem muito em relação ao método energético de diferenças finitas e ao método dos elementos finitos.

Durante o desenvolvimento do programa computacional, procurou-se minimizar o consumo de memória. A utilização do armazenamento vetorial da matriz de rigidez resultou em um consumo muito baixo de memória.

Por considerar esquemas de diferenças finitas centrais, a presente formulação recorreu à utilização de nós fictícios fora do domínio (fechado) da estrutura. BUSHNELL, ALMROTH e BROGAN

[8] compararam modelos de diferenças finitas providos de pontos fictícios com outros em que estes se excluem. Verificaram, então, que as soluções incluindo tais pontos adicionais tendem a convergir mais rapidamente à medida em que se refina a malha. Porém, observaram que a consideração destes pontos ocasiona resultados imprecisos em análises envolvendo problemas de auto-valores.

No caso em estudo, o domínio (fechado) é discretizado por nós possuindo apenas um grau de liberdade ou seja, o deslocamento transversal. Obtém-se assim uma equação por ponto nodal, o que torna vantajosa a eliminação dos deslocamentos nodais restringidos mediante a supressão de linhas e colunas das equações algébricas correspondentes. Diferentemente, no método dos elementos finitos são exigidos três graus de liberdade por nó (um deslocamento transversal e duas rotações).

Em geral, uma série de problemas envolvendo uma variedade de diferentes tipos de geometrias irregulares e mesmas equações diferenciais parciais tem sido mais convenientemente solucionados pelo método dos elementos finitos. É este provavelmente, mais do que qualquer outro, o fato responsável pelo amplo e corrente interesse em relação ao método dos elementos finitos na análise e projeto estrutural.

Importante é mencionar as limitações do método exposto. Sob um ponto de vista prático, o método dos elementos finitos apresenta vantagens face ao novo procedimento, no que se refere ao tratamento de variações bruscas de propriedades físicas e geométricas, e das descontinuidades.

É de se notar, a este ponto, que o método energético de diferenças finitas com malhas arbitrárias tende a tornar-se competitivo com o método dos elementos finitos em termos de generalidade, e, a partir de comparações preliminares, apresenta-se mais eficiente computacionalmente.

Seguem-se algumas sugestões para continuidade deste trabalho:

- utilização de diferenças progressivas e regressivas em pontos nodais situados no contorno, evitando-se desta forma a existência daqueles fora do domínio (fechado) da estrutura. Isto facilitaria muito a automatização, considerando-se a estrutura do programa computacional elaborado.
- análise de placas com bordos curvos usando o método exposto.
- consideração de diferentes áreas de integração para o cômputo das duas formas de energia: flexão e torção. Sugere-se que a energia de flexão seja avaliada utilizando-se os mesmos pontos nodais do modelo apresentado neste trabalho, porém que, para a energia de torção, seja adotado um esquema reduzido consistindo de uma célula da malha. Objetiva-se, com isso, uma melhor aproximação.
- pesquisa de vários modelos ("elementos") de diferenças finitas e tentativas no sentido de estabelecer a

formulação do método energético de diferenças finitas em bases matemáticas mais sólidas.

- implementação de um programa computacional visando a comparação de formulações, métodos de implementação, tempo computacional e taxas de convergência, utilizando-se vários modelos de diferenças finitas e elementos finitos. Tais modelos devem ser todos sedimentados em princípios de energia e no método dos deslocamentos, ou então no princípio da energia potencial total mínima. Importante é considerar que determinadas subrotinas devem ser estruturadas de modo a incluir tais formulações, constituindo um programa único.
- análise de associação de placas.
- extensão do método apresentado a problemas de campo, torção, cascas finas, etc.
- extensão da formulação para problemas não lineares e de análise dinâmica.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. - "The finite element method: from intuition to generality", Appl. Mech. Rev., pp. 249-256, (Março 1970).
- [2] COLLATZ, L. - The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 3ª Edição, (1960).
- [3] COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; KEWY, H. - "Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik", Math. Ann., vol. 100, pp. 32-74, (1928).
- [4] FORSYTHE, G.E.; WASOW, W.R. - Finite - Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1ª Edição, (1960).
- [5] HOUBOLT, J.C. - Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structures in High Speed Flight, Leeman, Zurich, Switzerland, 1ª Edição, (1958).
- [6] BUSHNELL, D. - "Analysis of buckling and vibration of ring-stiffened, segmented shells of revolution", Int. J. Solids Structures, vol. 6, pp. 157-388, (1971).
- [7] BUSHNELL, D. - Finite Difference Energy Models Versus Finite Element Models: Two Variational Approaches in One Computer Program - Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics (Eds. Fenves, S.J.; Perone, N.;

Robinson, J.; Schnobrich, W.C.), Academic Press, Inc., New York, 1ª Edição, (1973).

- [8] BUSHNELL, D.; ALMROTH, B.M.; BROGAN, F. - "Finite - difference energy method for nonlinear shell analysis", Comput. Structures, vol. 3, pp. 361-387, (1971).
- [9] STEIN, M. - "The effect on the buckling of perfect cylinders of prebuckling deformations and stresses induced by edge support", NASA TN D-1510, (Dezembro 1962).
- [10] HAVNER, K.S.; STANTON, E.L. - "On energy - derived difference equations in thermal stress problems", J. Franklin Inst., vol. 284, pp. 127-143, (1967).
- [11] BUDIANSKY, B.; ANDERSON, D.G.M. - "Numerical shell analysis - nodes without elements", 12th International Congress of Applied Mechanics, Stanford University, pp. 26-31, (agosto 1968).
- [12] JOHNSON, D.E. - "A difference - based variational method for shells", Int. J. Solids Struct., vol. 6, pp. 699-724, (1970).
- [13] ALMROTH, B.O.; BROGAN, F.A.; MARLOWE, M.B. - "Collapse Analysis for elliptic cones", AIAA, vol. 9, pp. 32-37, (1971).

- [14] NOOR, A.K. - "Improved Multilocal finite - difference variant for the bending analysis of arbitrary cylindrical shells", UNICIV Rep., nº R-63, University of South Wales, (Março 1971).
  
- [15] CHUANG, K.P. - Analysis of cylindrical roofs by use of use of energy principles and finite - differences, Ph.D., Dissertation, University of Illinois, (1962).
  
- [16] SCHNOBRICH, W.C.; PECKNOLD, D.A. - "The lumped parameter of bar - node model approach to thin shell analysis", Proc. ONR. Int. Symp. Numer. Comput. Methods Struct. Mech., Urbana, Illinois, pp. 8-10, (Setembro 1971).
  
- [17] BURAGOHAIN, D.H.; PATODI, S.C. - "Large deflection analysis of plates and shells by discrete energy method", Computers and Structures, vol. 9, pp. 315-322, (1978).
  
- [18] BURAGOHAIN, D.H.; PATODI, S.C. - "Geometric nonlinear analysis of structures by discrete energy method", TABSE Proceedings, P-20/79, pp. 1-12, (1979).
  
- [19] BURAGOHAIN, D.N.; AGRAWAL, S.B. - "Discrete analysis of curved slab - beam systems", International Association for Bridge and Structural Engineering Publications, vol. 34, part. II, pp. 19-38, (1974).
  
- [20] BUROGOHAIN, D.N. - "Discrete analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks", International Association

for Bridge and Structural Engineering Publications, vol. 32, part. I, pp. 37-47, (1972).

- [21] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.W. - Theory of Elasticity, McGraw Hill, New York, 3ª Edição, (1970).
  
- [22] DAVIES, G. - "Application of an irregular mesh finite - difference approximation to the plate buckling problem", Proc. Int. Conf. Southampton (Eds. Brebbia, C.; Tottenham, H.), Southampton University Press, England, (1972).
  
- [23] PERRONE, N.; KAO, R. - "A general finite difference method for arbitrary meshes", Computers & Structures, vol. 5, pp. 45-58, (1975).
  
- [24] CHU, W.H. - "Development of a general finite difference approximation for a general domain. Part. I: Machine transformation", J. Computational Phys., vol. 8, pp. 392-408, (1971).
  
- [25] FREY, W.H. - "Flexible finite - difference stencils from isoparametric finite elements", International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 11, pp. 1653-1665, (1977).
  
- [26] ERGATOUDIS, J.G.; IRONS, B.M.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis", Int. J. Solids Structures, vol. 4, pp. 31-42, (1968).

Wiley & Sons, Inc., United States of America, 1ª Edição, (1982).

- [35] SALVADORI, M.G.; BARON, M.L. - Numerical Methods in Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2ª Edição, (1961).
- [36] SALVADORI, M.G. - "Numerical computation of buckling loads by finite differences", Trans. ASCE, paper 2441, vol. 116, (1951).
- [37] JENSON, V.P. - "Analysis of Skew Slabs", Bull. Ser. nº 332, Univ. of Illinois, Eng. Experiment Station, Urbana, Illinois, (1941).
- [38] LANGHAAR, H.L. - Energy Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1962).
- [39] WASHIZU, K. - Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, Inc., Elmsford, New York, (1975).
- [40] DYM, C.L.; SHAMES, J.H. - Solid Mechanics: A Variational Approach, McGraw Hill, Inc., United States of America, 1ª Edição, (1973).
- [41] TONG, P.; PIANT, T.H.H. - "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems", Int. J. Solids Struct., vol. 3, pp. 865-879, (1967).

- [27] LAU, P.C.M. - "Numerical solution of Poisson's equation using curvilinear finite differences", Appl. Math. Modelling, vol. 1, pp. 349-350, (1977).
- [28] LAU, P.C.M. - "Curvilinear finite difference method for biharmonic equations", Int. J. NME, vol. 14, pp. 791-812, (1979).
- [29] BARVE, V.D.; DEY, S.S. - "Isoparametric finite difference energy method for plate bending problems", Computers & Structures, vol. 17, pp. 459-465, (1983).
- [30] PLETZ, E. - "Análise de Estruturas Laminares pelo Método da Energia Discretizada", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, (Maio de 1983).
- [31] WEINE FILHO, M. - "Um Modelo de Malha Irregular para o Método das Diferenças Finitas", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, (Fevereiro de 1979).
- [32] MILEK, J.L. - "Chapas Multiplamente Conexas (Uso de Malhas Arbitrárias)", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, (Novembro de 1981).
- [33] TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. - "Theory of Plates and Shells", McGraw Hill Kogakusha, Tokyo, 2ª Edição, (1981).
- [34] LAPIDUS, L.; PINDER, G.F. - "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", John

- [42] KANTOROVICH, L.V.; KRYLOV, V.L. - Approximate Methods of Higher Analysis, P. Noordhoff LTD, Groningen, The Netherlands, United States of America, 1ª Edição, (1958).
  
- [43] HAVNER, K.S. - "Finite-difference solution of two variable thermal and mechanical deformation problems", J. Spacecr. & Rockets, vol. 2, pp. 542-549, (1965).
  
- [44] ALLEN, D.N.G. - Relaxation Methods, McGraw Hill, Inc., United States of America, 1ª Edição, (1954).
  
- [45] ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method, McGraw Hill, London, 3ª Edição, (1982).
  
- [46] HENRICK, P. - Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 1ª Edição, (1965).
  
- [47] IRONS, B.M. - "Numerical integration applied to finite element methods", Conf. Use of Digital Computers in Structural Engineering, Univ. of Newcastle, (junho 1966).
  
- [48] BATHE, K.J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., United States of America, (1982).
  
- [49] GORDON, W.J.; HALL, C.A. - "Transfinite element methods: blending function interpolation over arbitrary curved element domains", Numer. Math., vol. 21, pp. 109-120, (1973).

- [50] KENNEDY, J.B.; TAMBERG, K.G. - "Problems of skew in concrete bridge design", Report No. RR144, Departament of Highways, Downsview, Ontario, Canada, (Março 1969).
- [51] NÓBREGA, F.S.F. - Estudo Comparativo de Análise Numérica Aplicada a Placas Esconsas, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, COPPE/UFRJ, (Setembro de 1972).
- [52] STRUDL II, Ics - The Structural Design Language Engineering User's Manual, Massachusetts Institute of Technology, vol. 2, 1ª Edição, (1969).
- [53] MORLEY, L.S.D. - Skew Plates and Structures, The MacMillan Co., New York, 1963.
- [54] RICHARDSON, L.F. - "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", Trans. Roy. Soc. (London), vol. A210, pp. 307-357, (1910).



**APÊNDICE****FLUXOGRAMAS SIMPLIFICADOS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL**

São apresentados, neste capítulo, fluxogramas simplificados do programa elaborado neste trabalho. As subrotinas e arquivos aqui referidos são descritos detalhadamente no Capítulo V.

Segue-se a relação de variáveis indicadas nos fluxogramas.

HED - título do programa.

NDX - número de divisões da malha na direção do eixo de coordenadas x.

NDY - número de divisões da malha na direção do eixo de coordenadas y.

NLCASE - número de casos de carregamento.

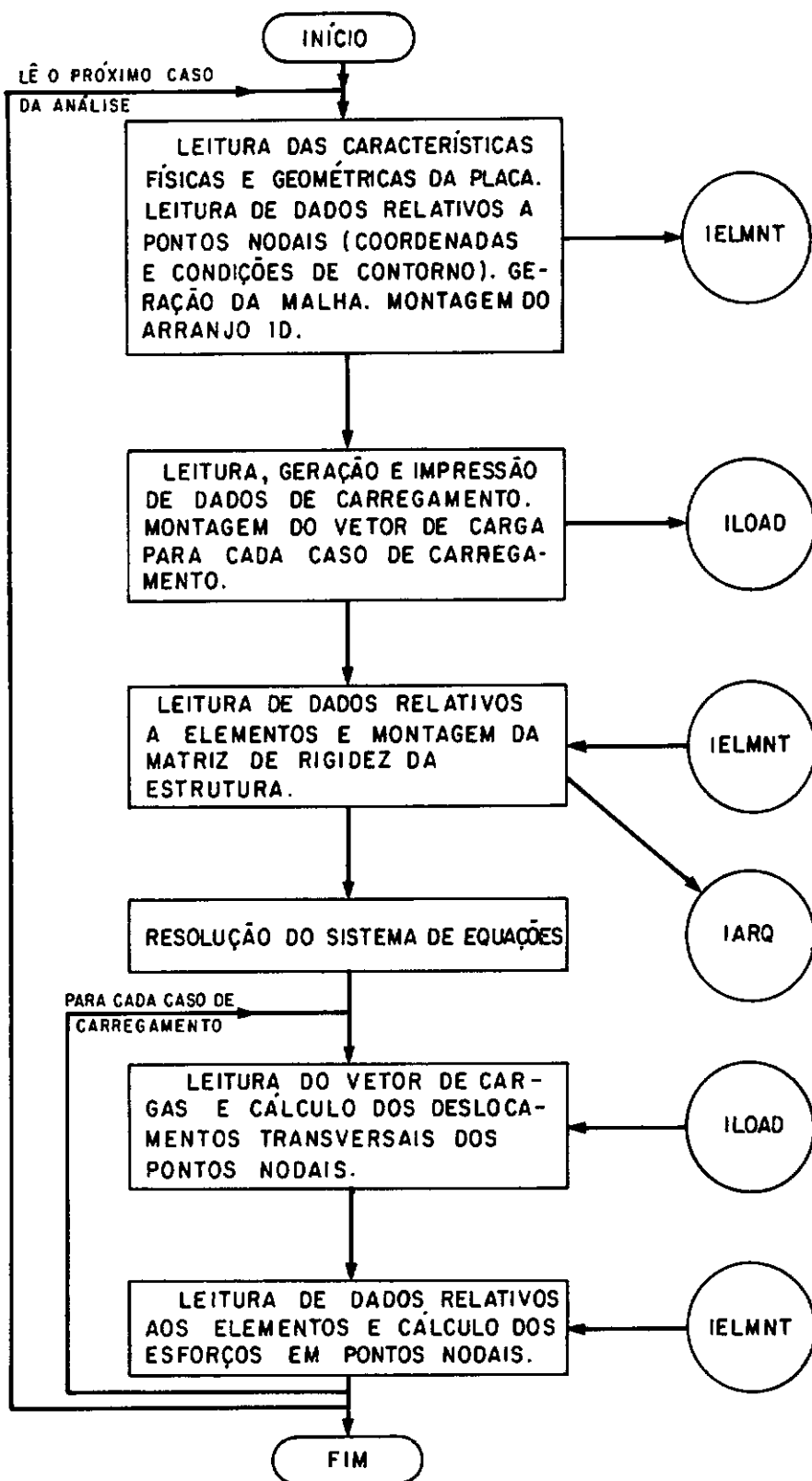
MODEX - código de verificação/execução.

NXX - número de nós da malha na direção do eixo de coordenadas x.

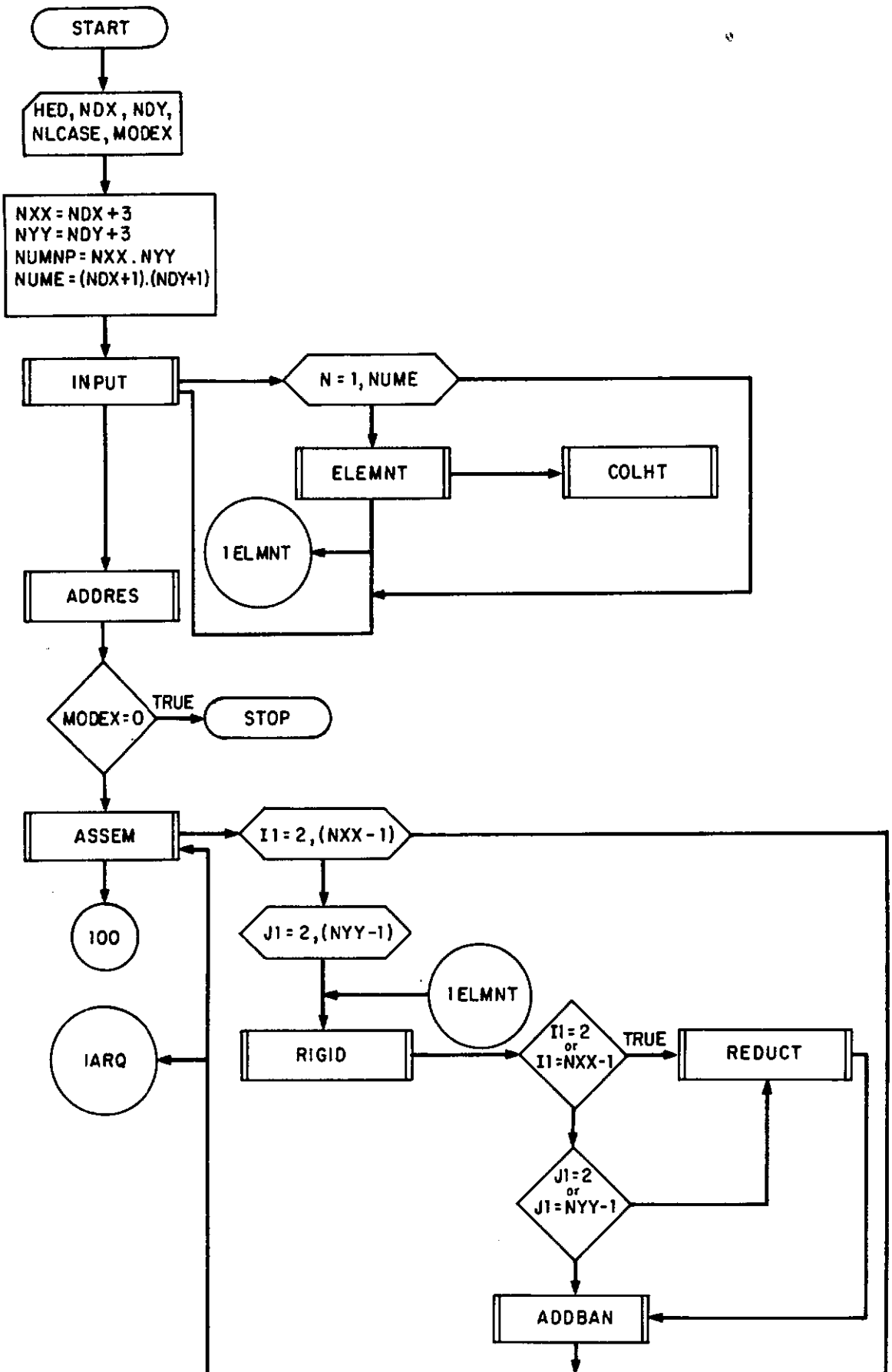
NYX - número de nós da malha na direção do eixo de coordenadas y.

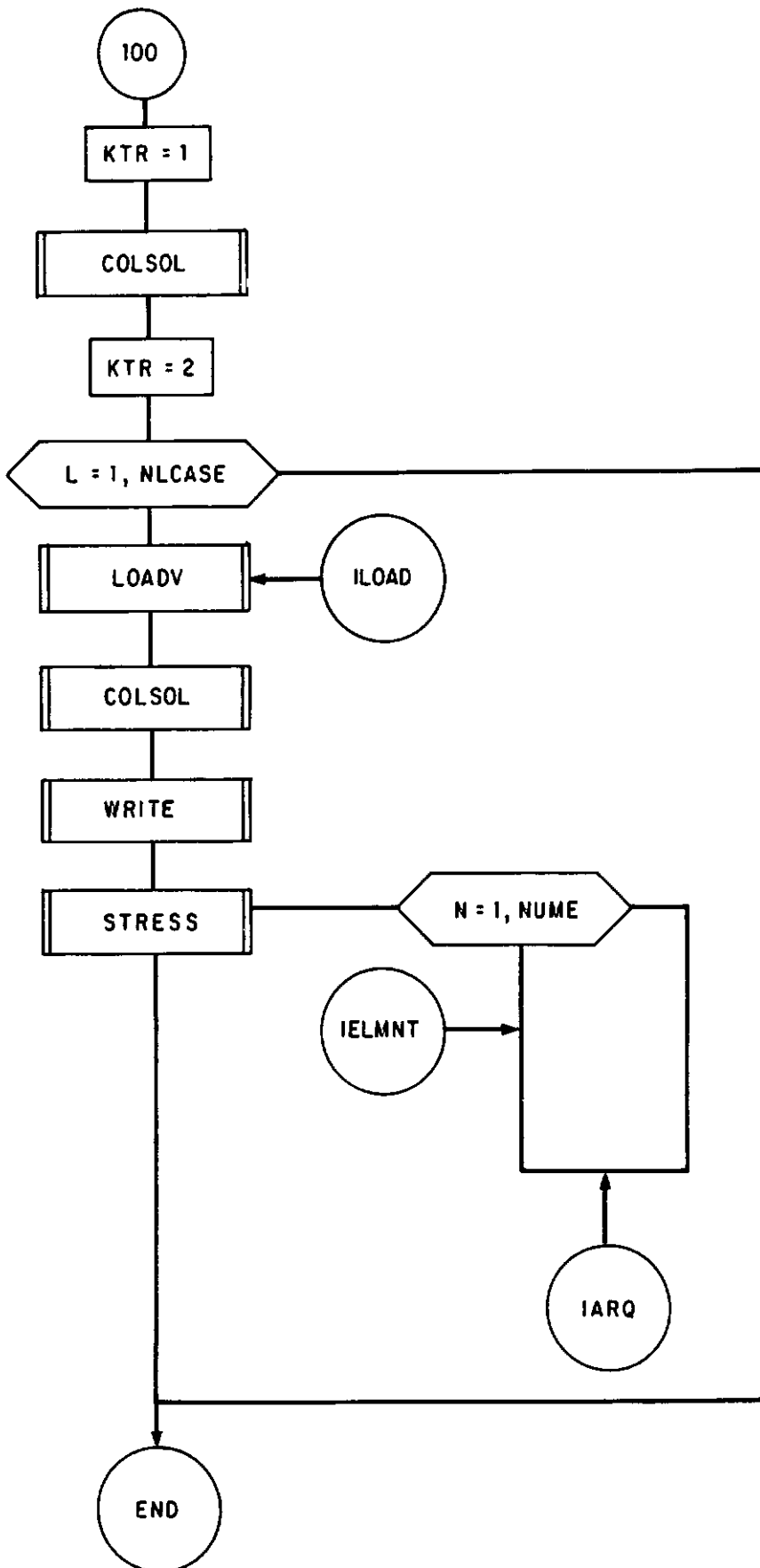
NUMNP - número de pontos nodais da malha.

- NUME - número de elementos da malha.
- NDEELM - número de deslocamentos do elemento.
- SK - matriz de rigidez do elemento.
- B - matriz que relaciona as deformações generalizadas aos deslocamentos transversais dos pontos nodais do elemento.
- D - matriz de elasticidade.
- AREA(N) - área do elemento N.

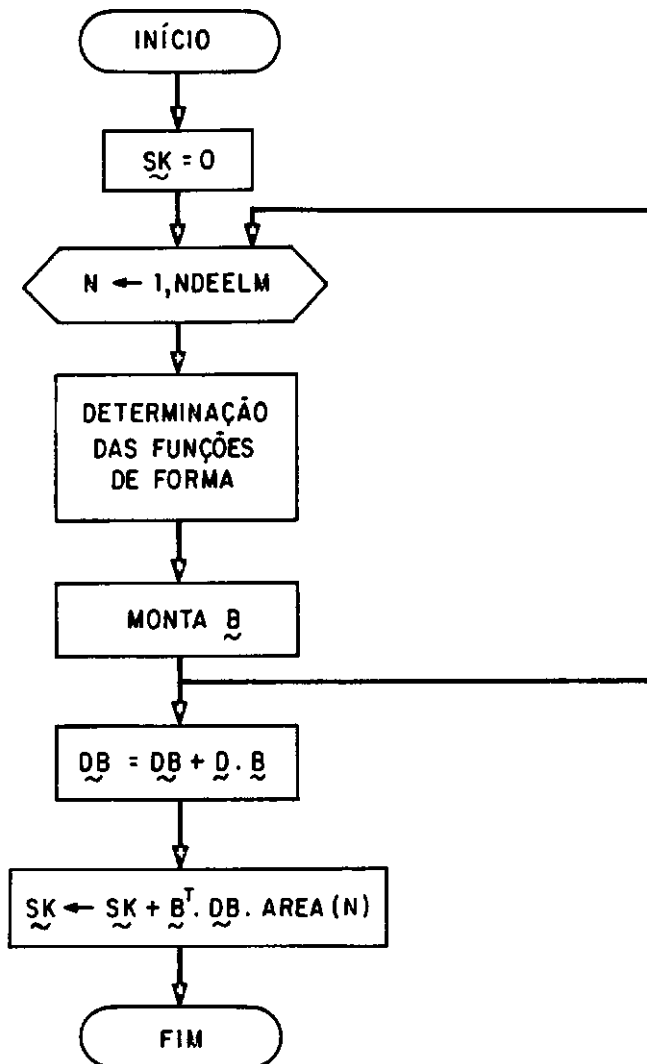


Fluxograma 1 - Etapas envolvidas no programa computacional.





Fluxograma 2 - Sequência de subrotinas e arquivos que constitem o programa.



Fluxograma 3 - Subrotina RIGID para obtenção da matriz de rigidez do elemento.